



# De LISA Pathfinder à LISA: Elaboration d'un simulateur dynamique pour la mission spatiale eLISA

Henri-René Inchauspe

## ► To cite this version:

Henri-René Inchauspe. De LISA Pathfinder à LISA: Elaboration d'un simulateur dynamique pour la mission spatiale eLISA. Planète et Univers [physics]. Université Paris Diderot, 2015. Français. NNT : . tel-01292840

**HAL Id: tel-01292840**

**<https://hal.science/tel-01292840>**

Submitted on 23 Mar 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse préparée  
à l'UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT  
École doctorale STEP'UP - ED N°560  
Laboratoire APC - Groupe Cosmologie et Gravitation

# De LISA Pathfinder à LISA Élaboration d'un simulateur dynamique pour la mission spatiale eLISA

par

Henri-René Inchauspé

présentée et soutenue publiquement le  
25 novembre 2015

Thèse de doctorat de Physique de l'Univers  
dirigée par Éric Plagnol

devant un jury composé de :

<b>Michel Boër</b> Directeur de recherche (Université Nice Sophia Antipolis)	Rapporteur
<b>Stefano Vitale</b> Professeur (Università degli Studi di Trento)	Rapporteur
<b>Bernard Foulon</b> Directeur de recherche (ONERA)	Membre
<b>Martin Hewitson</b> Astrophysicist (Leibniz Universität Hannover)	Membre
<b>Michel Piat</b> Professeur (Université Paris Diderot)	Membre
<b>Éric Plagnol</b> Directeur de recherche (Université Paris Diderot)	Directeur de thèse





# Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu Eric Plagnol, mon directeur de thèse, qui a fait preuve d'une disponibilité sans faille durant plus de trois ans, pour son encadrement bienveillant, ses conseils avisés et ses nombreux encouragements. Je réalise aujourd'hui que j'ai eu la chance de pouvoir apprendre et évoluer durant trois ans dans un environnement de travail serein et agréable, dont mon travail a d'ailleurs beaucoup profité, et c'est en grande partie grâce à lui.

Je souhaite aussi remercier l'ensemble de l'équipe LISA du laboratoire APC pour son accueil. En particulier, je voudrais remercier Antoine Petiteau pour ses conseils, son aide et son soutien tout au long de la thèse. Collaborer avec lui, toujours dans la bonne humeur, fut un grand plaisir et, en particulier, se battre avec mille et une chaînes de Monte-Carlo, dont il maîtrise bon nombre de secrets, m'a permis d'en apprendre beaucoup sur les différents concepts et les difficultés rencontrés en analyse des données. Un grand merci également à Hubert Halloin qui a été une source intarissable d'idées, d'explications et de conseils durant tout mon parcours de doctorant, lors de nos très nombreux échanges sur des sujets de physique très divers, parfois même en dehors du cadre de ma thèse, et dont j'espère profiter encore longtemps. Je remercie aussi Joseph Martino pour ses remarques pertinentes lors de la préparation de la soutenance de thèse, pour les diverses discussions fructueuses au sujet de LISA Pathfinder et pour son aide extrêmement bienvenue le jour de la soutenance ! Je remercie Gérard Auger pour ses nombreux conseils et ses explications sur le principe général de fonctionnement du détecteur eLISA, et de manière générale pour les nombreuses réflexions que l'on a pu partagées autour de la Physique. Je souhaite aussi remercier chaleureusement l'ensemble de l'équipe du FACe, pour tous les moments de convivialité que l'on a partagé, mais aussi pour leur soutien et leur partage d'expérience très profitable, bon nombre d'entre eux ayant très bien connu les joies et les difficultés du parcours d'un thésard.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble des membres du jury pour avoir consacré du temps à mon travail et pour s'être rendu disponible lors la soutenance de thèse, alors même que, par ailleurs, le lancement imminent de LISA Pathfinder occupait considérablement l'agenda et l'esprit de quelques-uns d'entre eux. Merci également aux équipes LISA et LISA Pathfinder de l'Albert Einstein Institute à Hanovre pour les discussions régulières et enrichissantes que l'on a pu partager durant ces trois ans.

Enfin, je tiens à remercier infiniment ma conjointe, Charlotte Launay, qui a été ma première supportrice durant cette aventure, et qui m'a conseillé, soutenu et encouragé à chaque étape, surtout dans les moments les plus difficiles. Un grand merci aussi à toute ma famille, de mon côté aussi bien que celui de Charlotte, pour tout l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et mon parcours, pour leur soutien bien sûr et pour leurs encouragements massifs lors de la soutenance ! En particulier, merci à Isabelle Brighenti pour l'apport considérable qu'elle a donné au présent manuscrit par l'intermédiaire de son rôle de professionnel de la grammaire et de l'orthographe, que je ne suis pas de toute évidence !

Merci à tous !

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>4</b>
<b>Introduction</b>	<b>12</b>
<b>I L’Univers gravitationnel et la mission eLISA</b>	<b>14</b>
<b>1 Principe d’équivalence et description relativiste de la gravitation</b>	<b>16</b>
1.1 Principe d’équivalence . . . . .	16
1.2 Courbure de l’espace-temps et mouvement géodésique . . . . .	18
1.3 Equations d’Einstein . . . . .	21
<b>2 Les ondes gravitationnelles</b>	<b>23</b>
2.1 Linéarisation des équations d’Einstein . . . . .	23
2.2 Ondes gravitationnelles . . . . .	24
2.3 Génération des ondes gravitationnelles . . . . .	26
2.4 Sources typiques . . . . .	28
2.4.1 Binaires de faible rapport de masse . . . . .	29
2.4.2 Binaires de rapport de masse extrême . . . . .	31
2.5 Principe de détection . . . . .	32
<b>3 Le détecteur spatial eLISA</b>	<b>35</b>
3.1 Mesure interférométrique . . . . .	38
3.2 Module ”Gravitational Reference Sensor” (GRS) . . . . .	41

3.3	Sensibilité du détecteur . . . . .	44
<b>II</b>	<b>Modèle dynamique</b>	<b>48</b>
<b>4</b>	<b>Orbitographie</b>	<b>50</b>
4.1	Orbites képlériennes et paramètres orbitaux . . . . .	50
4.2	Sélection des orbites képlériennes . . . . .	52
4.3	Construction géométrique des orbites . . . . .	53
4.4	Position des corps sur leur orbite . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Cinématique de la constellation</b>	<b>55</b>
5.1	Corps et référentiels . . . . .	55
5.2	Position et attitude : représentation et convention d'écriture . . . . .	56
5.2.1	Représentation de la position . . . . .	56
5.2.2	Représentation de l'attitude . . . . .	57
5.2.3	Convention d'écriture . . . . .	58
5.3	Pointage des satellites . . . . .	60
5.3.1	Attitude idéale . . . . .	60
5.3.2	Construction de l'attitude idéale en fonction des orbites . . . . .	61
5.4	Dérive orbitale des masses d'épreuve . . . . .	63
5.4.1	Orbites idéales des masses d'épreuve . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Dynamique de la constellation</b>	<b>67</b>
6.1	Dynamique des corps rigides . . . . .	67
6.1.1	Modèle du corps rigide . . . . .	68
6.2	Les équations du mouvement . . . . .	70
6.2.1	Equations du mouvement : les translations . . . . .	70
6.2.2	Equations du mouvement : les rotations . . . . .	71
6.2.3	Valeurs des masses et des tenseurs d'inertie . . . . .	72

6.2.4	Repère d'expression des équations du mouvement . . . . .	72
6.3	Le référentiel de consigne O . . . . .	73
6.3.1	Boucle de rétroaction et état d'équilibre . . . . .	73
6.3.2	Référentiel de consigne . . . . .	74
6.4	Les équations du mouvement : expression dans le référentiel O . . . .	76
6.4.1	Les translations . . . . .	76
6.4.2	Les rotations . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Modèle en représentation d'état</b>	<b>80</b>
7.1	La représentation d'état . . . . .	80
7.1.1	Equation d'état . . . . .	80
7.1.2	Matrices de la dynamique . . . . .	82
7.1.3	Equation de sortie . . . . .	84
7.2	Système linéaire et stationnaire . . . . .	85
7.2.1	Résolution matricielle . . . . .	85
7.2.2	Principe de superposition . . . . .	86
7.3	Linéarisation de la dynamique . . . . .	87
7.3.1	Dynamique au premier ordre . . . . .	87
7.3.2	Système stationnaire . . . . .	89
7.4	Forces et couple gravitationnelles . . . . .	90
7.4.1	Force de dérive gravitationnelle . . . . .	90
7.4.2	Couple gravitationnel . . . . .	92
<b>III</b>	<b>Simulateur</b>	<b>93</b>
<b>8</b>	<b>Le simulateur LISA</b>	<b>95</b>
8.1	Diagramme en bloc . . . . .	95
8.2	Système de mesure . . . . .	97

8.2.1	Mesure différentielle de front d'onde DWS . . . . .	97
8.2.2	Mesures interférométriques du déplacement des masses d'épreuve (IFO) . . . . .	99
8.2.3	Senseurs inertiels ( <i>IS</i> ) . . . . .	100
8.3	Système d'actuation . . . . .	102
8.3.1	Micropropulsion du satellite . . . . .	102
8.3.2	Système d'actuation électrostatique ( <i>CAPACT</i> ) . . . . .	104
8.4	Perturbations directes sur les variables dynamiques . . . . .	108
8.4.1	Forces de perturbation externes . . . . .	109
8.4.2	Forces de rappel . . . . .	110
8.5	Drag-Free and Attitude Control System ( <i>DFACS</i> ) . . . . .	111
8.5.1	Stratégie de <i>Drag-Free</i> . . . . .	111
8.5.2	Contrôle d'attitude, Drag-Free et contrôle de suspension . . .	112
8.5.3	Contrôleurs . . . . .	114
8.6	Assemblage des sous-modules . . . . .	117
8.7	Réponse temporelle du système en boucle fermée . . . . .	120
8.8	Déroulement d'une simulation . . . . .	121
<b>9</b>	<b>Le bruit d'accélération</b>	<b>123</b>
9.1	Estimation de l'accélération subie par les masses d'épreuve . . . . .	123
9.1.1	Calcul de l'accélération à partir des variables d'état du système	123
9.1.2	Calcul de l'accélération à partir des forces appliquées . . . . .	125
9.2	Projection de l'accélération sur l'axe sensible . . . . .	125
9.3	Spectre du bruit d'accélération . . . . .	127
<b>10</b>	<b>Analyse des résultats de simulation</b>	<b>131</b>
10.1	Evolution des variables dynamiques . . . . .	131
10.1.1	Stratégie de contrôle et niveau de stabilité des variables dyna- miques . . . . .	132

10.1.2	Performances requises en régime permanent . . . . .	135
10.2	Performances de contrôle . . . . .	137
10.3	Bruit d'accélération et décomposition de l'influence des différents bruits et imperfections . . . . .	142
10.3.1	Bruit d'accélération à basse fréquence : perturbations directes et système interférométrique . . . . .	144
10.3.2	Bruit d'accélération à haute fréquence : senseurs inertiels et système de micropropulsion . . . . .	147
10.4	Bruit d'accélération et diaphonie d'actuation . . . . .	150
10.4.1	Seuil maximal d'actuation et performances de contrôle . . . .	152
10.4.2	Estimation de la matrice de diaphonie du système d'actuation	161
<b>11</b>	<b>Vers une version plus quantitative du simulateur : études expéri- mentales des forces de perturbation et des bruits instrumentaux</b>	<b>166</b>
11.1	Budget de bruit : modèle de décomposition et caractérisation expéri- mentale . . . . .	167
11.1.1	Forces de perturbation directes . . . . .	167
11.1.2	Modèle de bruit des actuateurs et des senseurs . . . . .	170
11.2	Etude du bruit d'accélération pour une mission présentant les perfor- mances attendues pour LISA Pathfinder . . . . .	174
11.3	Extrapolation du modèle à la mission eLISA . . . . .	177
<b>IV</b>	<b>Discussion et perspectives</b>	<b>179</b>
<b>12</b>	<b>Première estimation du bruit d'accélération</b>	<b>181</b>
12.1	Configuration optimale . . . . .	181
12.2	Bruit d'accélération et variation de chemin optique . . . . .	182
<b>13</b>	<b>Proposition d'améliorations du simulateur</b>	<b>186</b>
13.1	Optimisation des contrôleurs . . . . .	186
13.2	Modélisation fidèle des instruments de mesure et d'actuation . . . .	188



13.3 Construction d'un modèle non-linéaire . . . . .	190
13.4 Influence de l'attitude du satellite . . . . .	191
13.5 Etude de configurations de l'instrument . . . . .	193
<b>14 Le simulateur dans la collaboration eLISA</b>	<b>194</b>
<b>Conclusion</b>	<b>198</b>
<b>A Activités menées au sein de la communauté LISA Pathfinder</b>	<b>202</b>
A.1 Identification système . . . . .	203
A.2 MCMC Hammer . . . . .	206
A.2.1 Eléments d'analyse bayésienne . . . . .	206
A.2.2 Algorithme MCMC . . . . .	206
A.2.3 Exemple de résultats obtenus . . . . .	210
A.3 Discussion et perspectives . . . . .	217
<b>Abstract</b>	<b>225</b>

# Introduction

En novembre 2013, l'agence spatiale européenne décide de sélectionner le thème scientifique "*l'Univers Gravitationnel*" [40] pour la future mission spatiale large dont le lancement est prévu aux alentours de 2034. Pour la première fois, dans le domaine du spatial, la voie d'une astronomie d'une toute nouvelle nature est en passe de s'ouvrir, le médiateur traditionnel des observations, le photon, cédant sa place aux ondes gravitationnelles dont l'existence fut prédite par Albert Einstein, dès 1915, dans sa théorie de la relativité générale. Bien qu'à ce jour ce rayonnement n'ait toujours pas été observé directement, plusieurs preuves indirectes, dont la plus fameuse est issue des observations de Hulse et Taylor à partir de 1974, semblent fermement conforter l'existence d'un tel rayonnement. La nature exotique des sources astrophysiques rayonnantes, les observations à très grande distance permises par cette astronomie et le caractère entièrement inédit de la détection d'ondes gravitationnelles font de ce thème l'un des défis scientifiques majeurs du XXI-ème siècle.

Le thème scientifique validé par l'agence spatiale européenne en 2013 s'accompagne de la proposition d'un concept de mission, appelé evolved Laser Interferometer Space Antenna (*eLISA*), non-définitif à ce jour, mais qui ne souffre pas encore d'une concurrence franche. La prochaine étape de la définition de la mission large *L3* consiste à sélectionner un concept de détecteur, puis d'engager les développements technologiques nécessaires à sa construction. D'ici la fin de la décennie, la priorité de la communauté scientifique *eLISA* semble donc de réaliser une étude des configurations imaginables pour la mission *eLISA*, afin d'aboutir au meilleur compromis entre budget nécessaire et bénéfices scientifiques attendus.

Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit s'inscrit dans ce programme, en tentant de contribuer à la caractérisation de la sensibilité du détecteur. A cet effet, un simulateur dynamique du détecteur a été développé et permet d'évaluer le bruit d'accélération pour diverses configurations du détecteur, ce bruit étant responsable de la détérioration de la sensibilité du détecteur à basse fréquence. Il offre également l'opportunité d'étudier l'influence des propriétés des divers instruments embarqués sur ce bruit d'accélération, participant alors à une meilleure compréhension générale du fonctionnement du détecteur.

Ce manuscrit se développera en quatre parties. Dans un premier temps, on introduira rapidement le concept des ondes gravitationnelles et le cadre théorique dans lequel elles s'inscrivent. Ce sera l'occasion de réaliser un bref parcours des sources as-

trophysiques de principal intérêt pour la mission *eLISA* et d'introduire le principe de fonctionnement du détecteur. Dans la seconde partie, on expose la modélisation réalisée de la dynamique du système qui constitue le coeur de l'outil de simulation. On y introduit le concept de représentation d'état d'un système différentiel, sur lequel se base la modélisation du système en boucle fermée. En troisième partie, on présente la modélisation des différents modules du simulateur, des systèmes de mesure aux systèmes d'actuation, en passant par la loi de contrôle permettant l'asservissement de la dynamique du système. Dans cette partie, on commente également les premiers résultats du simulateur, telle la stabilité des variables dynamique ou, plus généralement, les qualités de l'asservissement observées. Mais on y présente surtout les performances atteintes en terme de bruit d'accélération, et on décompose les influences de diverses propriétés modélisées du détecteur sur ce bruit. Dans la partie finale, on donne, à titre d'illustration, une estimation préliminaire du bruit d'accélération attendu et on propose un ensemble d'améliorations possibles à apporter à l'outil de simulation.

## Première partie

# L'Univers gravitationnel et la mission eLISA

Dans cette première partie, on introduit le concept des ondes gravitationnelles par une brève discussion du cadre théorique dans lequel elles s'inscrivent, la description relativiste de l'interaction gravitationnelle et en particulier la théorie de la relativité générale d'Einstein. On présente notamment quels sont les mécanismes de ce rayonnement et comment certains objets et phénomènes violents dans l'Univers peuvent constituer des candidats à une telle émission. Dès lors, ce rayonnement gravitationnel constitue le témoin observable de cette activité et leur détection ouvre la voie d'une toute nouvelle astrophysique, celle de l'Univers gravitationnel. On discute alors des différentes méthodes de détection mises en oeuvre ou en projet à ce jour, en se concentrant en particulier sur la mission *eLISA*, futur observatoire spatial d'ondes gravitationnelles, et sujet du présent manuscrit. On présente le principe de détection de *eLISA* et discute de la sensibilité de l'instrument qui limite la nature des sources potentiellement observables. On mentionne enfin le lancement du satellite LISA Pathfinder prévu pour octobre 2015, véritable éclaireur pour la mission *eLISA*, dont le but est de tester en milieu spatial une technologie similaire à celle envisagée pour la détection d'ondes gravitationnelles avec *eLISA*.

# Chapitre 1

## Principe d'équivalence et description relativiste de la gravitation

### 1.1 Principe d'équivalence

L'idée de la relativité générale d'Einstein démarre d'une considération simple en apparence qui va pourtant considérablement modifier le point de vue de la science sur la force de gravitation. En mécanique classique déjà, on observe par l'intermédiaire de la loi de gravitation de Newton une correspondance entre masse inerte  $m_i$ , responsable de la résistance des corps à toute accélération  $\vec{a}$  par rapport à un référentiel inertiel, et la masse pesante  $m_g$  qui définit l'intensité de la force gravitationnelle que subit un corps dans un champ gravitationnel  $\vec{g}$  (de manière similaire à la force de Coulomb, produit de la charge électrique et du champ électrostatique local).

$$m_g \vec{g} = m_i \vec{a} \tag{1.1}$$

La correspondance entre masses inerte et grave ( $m_g = m_i$ ) est tout à fait remarquable, car elle implique que la trajectoire de tout corps dans un champ gravitationnel est identique pourvu que les conditions initiales du mouvement soient rigoureusement similaires. La trajectoire physique dans le champ de gravitation ne dépendrait aucunement de la masse du corps, à l'inverse du mouvement d'une particule chargée plongée dans un champ électrostatique. Il existe plusieurs niveaux de ce principe d'équivalence et celui qui invoque essentiellement l'égalité des masses inertes et graves est appelé *principe d'équivalence faible*. Galilée l'énonce pour la première fois, dès le XVII-ème siècle, en affirmant que [8] : "*Le mouvement de n'importe quel corps en chute libre est indépendant de sa composition et de sa structure.*"

Le *principe d'équivalence d'Einstein* propose une relation encore plus intime entre

inertie et gravitation. L'expérience de pensée célèbre mettant en scène un ascenseur spatial accéléré uniformément par rapport à tout référentiel inertiel illustre parfaitement cette relation. On imagine donc un ascenseur dans le vide intersidéral, donc loin de toutes influences gravitationnelles extérieures, soumis à une accélération  $\vec{g}$  du point de vue d'un observateur  $A$  inertiel extérieur et par l'intermédiaire d'une force exercée par un être gigantesque de nature inconnue. Un observateur  $B$  se trouve dans l'ascenseur et se voit incapable d'observer un autre environnement que l'intérieur de la cabine. L'observateur  $B$  possède quantité de pommes de taille et masse différentes qu'il décide de lâcher simultanément de la même hauteur. Il observe alors que chacun de ces corps chute à une vitesse identique quelque soit leur masse. Si ce dernier est au fait des principes de la mécanique newtonienne, il en déduira certainement la présence d'un champ de forces de type gravitationnel, dont l'intensité dépend de la masse grave des objets. En revanche, l'observateur  $A$ , ayant alors remarqué la présence du géant, et dont le souci majeur est bien entendu de réaliser que l'ascenseur ne constitue pas un référentiel inertiel, interprétera ce champ de forces dont parle l'observateur  $B$  comme le résultat de forces d'inertie apparentes. Pour lui, ce n'est pas la pomme qui tombe, mais bien le sol uniformément accéléré par rapport à elle, tout juste inertielle depuis qu'elle a été désolidarisée du référentiel de l'ascenseur lorsque l'observateur  $B$  l'a lâchée, qui la rattrape à une vitesse en constante augmentation.

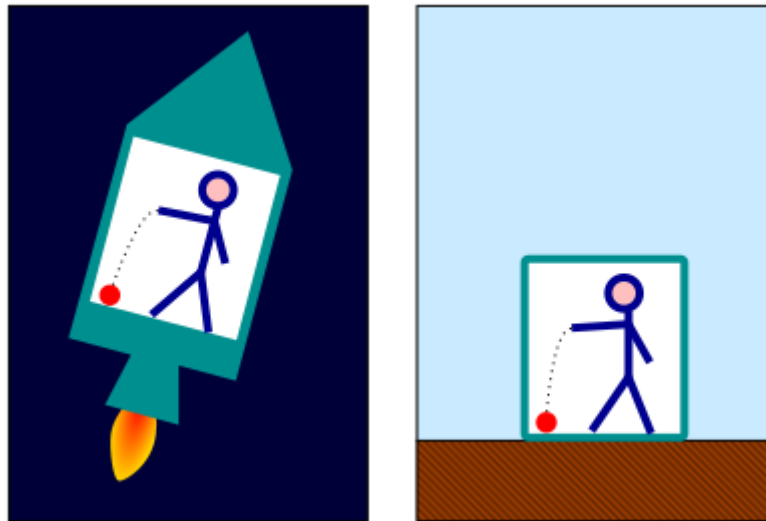


FIGURE 1.1 – Illustration de l'expérience de pensée d'Einstein. L'observateur  $B$  dans l'ascenseur spatial, accéléré du point de vue d'un observateur extérieur  $A$ , interprète le mouvement de la pomme tout juste lâchée comme influencé par un champ de force gravitationnel. Credit : Markus Poessel.

Il serait alors tentant, bien que pas franchement rassurant, de s'identifier à l'observateur  $B$  dans l'ascenseur et interpréter la gravité terrestre comme résultant d'une accélération uniforme exercée par un individu titanesque. La notion de poids des objets sur Terre ne serait alors que le reflet de leur inertie, c'est-à-dire l'effort que l'on doit produire pour accélérer ces objets par rapport au sol terrestre et ainsi éviter qu'il ne les rattrape. Cependant, cette analogie n'est rendue valide que dans le cadre d'un champ d'accélération homogène, ce qui n'est bien sûr pas le cas sur Terre et de

manière générale dans l'Univers. La présence d'effets de marée résultant du caractère inhomogène du champ gravitationnel, à la fois en direction et en intensité, ne peut pas être reproduite par un tel champ d'accélération. Pour montrer cela, on retrouve maintenant l'ascenseur et l'observateur  $B$  en chute libre dans le champ gravitationnel terrestre. Selon l'analogie précédente, l'observateur  $B$  n'éprouve plus aucune difficulté à soulever l'une de ces pommes et ces dernières se retrouvent à flotter devant lui lorsqu'il les lâche. Tout se passe comme si la force de gravitation avait disparu de l'ascenseur. A l'exception cependant d'un phénomène : lorsque l'observateur  $B$  lâche simultanément deux de ses pommes, en admettant qu'il fasse preuve d'une précision d'observation remarquable, il constate alors que ces pommes se rapprochent l'une de l'autre, phénomène qui ne peut pas être expliqué en l'absence totale de gravitation. En réalité, le champ gravitationnel auquel sont soumises les pommes est central. D'un point de vue newtonien, les forces exercées par la Terre sur les deux pommes ne sont pas exactement colinéaires et on aperçoit alors une très faible accélération relative entre ces deux corps.

Le principe d'équivalence d'Einstein va bien au-delà de l'égalisation de la valeur numérique des masses inertes et graves en unifiant également leur nature profonde. Il énonce que les points de vue des observateurs  $A$  et  $B$  de la première expérience sont équivalents. L'observateur  $B$  est en droit de penser qu'il est un observateur au repos et d'interpréter la dynamique des corps dont il dispose comme soumis à un champ de gravitation. En particulier, Einstein soutient [12] qu'aucun privilège ne doit être attribué aux référentiels inertiels pour décrire de quelconques phénomènes physiques, comme le suggère le principe d'inertie de Newton, où les corps en mouvement libre sont contraints à un déplacement rectiligne et uniforme relativement à un référentiel galiléen. Dans un référentiel non-inertiel, accéléré ou en rotation, ces lois physiques sont préservées valides tant que les effets d'inertie, ou interprétés de manière équivalente comme les effets d'un champ de gravité, sont considérés. Il généralise ainsi le principe de relativité, qui stipulait jusqu'alors que les lois physiques s'énoncent de manière équivalente dans n'importe quel référentiel inertiel, à une classe plus large de référentiels incluant les référentiels non-galiléens.

## 1.2 Courbure de l'espace-temps et mouvement géométrique

Par l'intermédiaire de l'équivalence entre les conclusions de l'observateur  $A$  et  $B$  de l'expérience de l'ascenseur, Einstein déduit de la théorie de la relativité restreinte une nouvelle interprétation de la nature de la gravitation. Pour cela, il considère deux disques de dimensions identiques au repos, le second  $K'$  étant en rotation à vitesse constante par rapport au premier  $K$ , considéré comme inertiel, autour d'un axe  $\vec{z}$  commun. En disposant un ensemble de réglettes de taille similaire autour de la périphérie des deux disques et le long de leur diamètre, il propose de comparer la géométrie apparente de ces disques. La théorie de la relativité restreinte affirme que, du point de vue de  $K$ , les réglettes en périphérie de  $K'$  sont soumises à la contraction



de Lorentz, mais pas celles situées selon le diamètre (car orthogonales à la vitesse des réglettes qui est tangentielle à la périphérie du disque). Par conséquent, selon  $K$ , le rapport de son diamètre  $D$  sur sa circonférence  $C$  est défini en géométrie euclidienne comme  $\frac{C}{D} = \pi$  alors que ce même rapport pour le disque  $K'$ , toujours du point de vue de  $K$  est  $\frac{C}{D} > \pi$ . De même, si l'on affecte la périphérie et le centre du disque  $K'$  de deux horloges strictement identiques, la durée de leur battement ne sera pas observée identique par  $K$  comme par  $K'$ , et celle en périphérie apparaîtra battre plus lentement.

Einstein arrive alors à la conclusion révolutionnaire suivante [12] : *"Le champ gravitationnel influence et même dicte les lois métriques du continuum espace-temps"*. Il construit une théorie relativiste de la gravitation en interprétant ses effets comme résultant de la *"chrono-géométrie"* de l'espace-temps, déjà introduite par Hermann Minkowski dans le cadre des espace-temps plats de la relativité restreinte. L'objet espace-temps perd à nouveau de sa rigidité acquise en mécanique classique lorsque la gravitation est interprétée par Einstein comme le résultat de sa courbure. Dans un espace-temps courbe, la géométrie euclidienne n'est plus de rigueur et le rapport de la circonférence d'un cercle sur son diamètre ne donne plus la constante  $\pi$ , comme déjà remarqué avec l'exemple du disque en rotation. C'est la géométrie en espace courbe qui la remplace, et par son intermédiaire, le principe d'inertie de Newton est complètement redéfini : un corps en mouvement libre poursuit par rapport à un quelconque référentiel une trajectoire géodésique, c'est-à-dire la plus courte entre deux points, la notion de distance étant intimement liée à la géométrie de l'espace-temps. La première loi de Newton est donc remplacée par l'équation du mouvement géodésique suivante :

$$\frac{d^2 X^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dX^\alpha}{ds} \frac{dX^\beta}{ds} = 0 \quad (1.2)$$

pour le quadrivecteur événement  $X^\nu = (ct, \vec{x})$ ,  $s$  étant l'intervalle espace-temps (ou le temps propre du corps considéré) et  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  est le symbole de Christoffel permettant de rendre compte de l'influence de la géométrie de l'espace-temps considéré dans l'évolution temporelle du quadrivecteur  $X^\nu$ .

Pour caractériser localement les propriétés de l'espace-temps, on utilise la quantité tensorielle  $g_{\mu\nu}$ , appelée tenseur métrique, qui définit les relations de distances infinitésimales entre un point de l'espace-temps physique et son voisinage le plus proche. Le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  définit complètement la géométrie de l'espace-temps. Dans l'équation 1.2, le symbole de Christoffel  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  est relié au tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  par :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \quad (1.3)$$

où l'on introduit la convention de sommation d'Einstein, et la virgule en indice désignant l'opérateur de dérivée partielle rendue plus explicite dans l'équation 1.4.

$$g_{\alpha\beta,\nu} = \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial X_\nu} \quad (1.4)$$

Dans ce cadre, en présence d'un champ gravitationnel ou non, l'intervalle d'espace-temps infinitésimal entre deux événements s'écrit :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (1.5)$$

où l'on retrouve l'intervalle de la relativité restreinte pour l'espace-temps plat de Minkowski, c'est-à-dire en l'absence de champ de gravitation, lorsque  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ .

L'intention d'Einstein était de créer un cadre théorique dans lequel l'ensemble des lois physiques, en particulier les équations de Maxwell, s'écrivent de manière équivalente, quelque soit le référentiel considéré, qu'il soit inertiel, non-inertiel ou en présence d'un champ de gravitation : c'est la relativité générale. Cette équivalence de l'expression des lois physiques exige d'adopter un formalisme mathématique permettant de rendre les équations indépendantes du choix de coordonnées. L'introduction des tenseurs pour représenter les quantités physiques permet une expression des lois indépendante du choix du système de coordonnées. En outre, la notion de dérivée temporelle doit être redéfinie pour convenir au choix de n'importe quel système de coordonnées, ce qui revient schématiquement à considérer l'influence de la courbure spatio-temporelle dans l'évolution temporelle apparente d'une quantité physique. On introduit alors la notion de dérivation covariante dans l'équation suivante par son application sur un quadrivecteur  $A^\mu$  quelconque :

$$\frac{DA^\mu}{Ds} = \frac{dA^\mu}{ds} + \Gamma_{\mu\alpha}^\nu A_\nu \left( \frac{dX^\alpha}{ds} \right) \quad (1.6)$$

On peut montrer qu'en introduisant ce nouvel opérateur de dérivation, l'équation géodésique s'écrit simplement :

$$\frac{DP^\mu}{Ds} = 0 \quad (1.7)$$

où  $P^\mu$  est le quadrivecteur énergie-impulsion de la particule test considérée. En comparant l'équation 1.7 à la troisième loi de Newton, on aperçoit une nouvelle formulation de l'équation de la dynamique, cette fois-ci munie de la propriété de covariance généralisée, c'est-à-dire valide quelque soit le système de coordonnées sélectionné.

### 1.3 Equations d'Einstein

Dans le cadre de la relativité générale, le champ gravitationnel est maintenant interprété comme la manifestation de la courbure de l'espace-temps. Le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  détermine complètement sa structure géométrique. Il reste alors à établir une équation des champs relativiste pour l'interaction gravitationnelle, dont la solution est le tenseur  $g_{\mu\nu}$ , qui se doit de coïncider avec la loi de gravitation de Newton en champ faible. Pour réaliser ce programme, Einstein s'inspire de l'équation de Poisson exprimant le potentiel gravitationnel qu'engendre localement la matière en fonction de sa densité de masse :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad (1.8)$$

D'une manière comparable, il souhaite formuler une équation locale exprimant la structure géométrique de l'espace-temps, dans le membre de gauche de l'équation et où  $g_{\mu\nu}$  reprend le rôle du potentiel  $\Phi$  dans l'équation de Poisson, en fonction de la densité d'énergie, dont l'analogue relativiste est maintenant le tenseur énergie-impulsion noté  $T_{\mu\nu}$ . De l'équation de Poisson, il dérive également 3 contraintes que doit respecter son équation des champs relativiste :

- L'équation ne doit pas contenir des termes de dérivée de  $g_{\mu\nu}$  d'ordre supérieur à 2.
- Cette équation doit être linéaire en ces termes.
- La divergence de l'équation doit s'annuler pour respecter le principe de conservation de l'énergie et de l'impulsion ( $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$ ).

Cette série de contraintes conduit Einstein à établir des équations du champ gravitationnel relativistes suivantes :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

où  $R_{\mu\nu}$  est le tenseur de Ricci, correspondant à la contraction du tenseur de Riemann, d'ordre 4, décrivant la courbure de l'espace-temps ( $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$ ) et  $R$  est appelé scalaire de Ricci, retrouvé par contraction du tenseur de Ricci ( $R = R^\alpha_\alpha$ ). Le tenseur de Riemann  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  n'implique que des termes de dérivée seconde du tenseur métrique.

La résolution de ces équations donnent la structure géométrique locale  $g_{\mu\nu}$  de l'espace-temps à partir de la connaissance du contenu énergétique  $T_{\mu\nu}$  au point considéré. Cette résolution est de manière générale rendue très compliquée, notamment de par le caractère fortement non-linéaire de ces équations. L'origine de ces non-linéarités peut être expliquée en notant que le champ gravitationnel transporte de l'énergie, et de ce fait, contribue également à la courbure spatio-temporelle. Une

expression commune formule d'ailleurs cette propriété en affirmant que la gravité...  
gravite !

# Chapitre 2

## Les ondes gravitationnelles

Une conséquence du caractère relativiste des équations d'Einstein est que la vitesse de propagation de l'interaction gravitationnelle est finie. Cela signifie par exemple qu'une modification de la structure interne du Soleil, provoquée par un événement quelconque, n'aurait d'incidence sur les trajectoires orbitales des planètes du système solaire que quelques instants plus tard. En relativité générale, cette vitesse coïncide avec la vitesse de la lumière. Cette propriété du champ de gravitation, qu'il partage d'ailleurs avec le champ électromagnétique, implique l'existence d'un mode particulier de propagation des perturbations gravitationnelles : les ondes gravitationnelles. Ce sont des fluctuations ondulantes de la courbure de l'espace-temps se propageant à la vitesse de la lumière. L'existence de ces ondes est clairement mise en évidence après linéarisation des équations d'Einstein, ces dernières prenant alors la forme d'une équation d'onde.

### 2.1 Linéarisation des équations d'Einstein

Dans la limite des champs faibles, on peut considérer que la géométrie de l'espace-temps correspond à un espace-temps plat affecté d'une faible perturbation de la métrique. Cette géométrie est alors décrite au premier ordre par le tenseur métrique  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , résultat de l'addition du tenseur métrique de Minkowski, associé à un espace-temps plat, et d'une petite perturbation  $h_{\mu\nu}$  telle que  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . La faiblesse de la perturbation  $h_{\mu\nu}$  permet de ne garder dans le membre de gauche des équations d'Einstein en 1.9 que les termes linéaires en  $h_{\mu\nu}$ . Sous cette approximation, on peut montrer [29] que ces équations prennent la forme linéaire suivante, en posant  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$  :

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta,}{}^{\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\nu} + \bar{h}_{\nu\alpha,}{}^{\alpha}{}_{\mu} = \frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

Dans l'équation 2.1, les trois derniers termes du membre de gauche apparaissent

pour maintenir la généralité de l'expression quelque soit le système de coordonnées utilisé. Cette invariance des équations d'Einstein au choix du système de coordonnées est aussi appelée, par analogie avec l'électromagnétisme, invariance de jauge. En sélectionnant une classe appropriée de système de coordonnées, ou autrement dit en imposant une condition de jauge particulière, on peut écrire 2.1 sous une forme plus simplifiée. Cette condition est l'analogue gravitationnelle de la jauge de Lorentz :

$$\bar{h}^{\mu\alpha}_{,\alpha} = 0 \quad (2.2)$$

Dans cette jauge, l'équation 2.1 s'écrit :

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

ou en introduisant la notation classique de l'opérateur de D'Alembert :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

## 2.2 Ondes gravitationnelles

L'équation prend alors la forme d'une équation d'onde, qui en l'absence de source, correspond à l'équation de propagation dans le vide des ondes gravitationnelles :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.5)$$

Les solution les plus simples de cette équation de propagation sont, au même titre qu'en électromagnétisme, des ondes planes monochromatiques, mais dont l'amplitude est dans ce cas une quantité tensorielle :

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \Re [A_{\mu\nu} \exp(ik_{\alpha} X^{\alpha})] \quad (2.6)$$

où  $A_{\mu\nu}$  désigne l'amplitude de l'onde, et  $k_{\alpha} = (\omega/c, k_x, k_y, k_z)$  le quadrivecteur d'onde. Cette solution correspond à une onde plane de fréquence  $\omega/2\pi$  se propageant dans la direction  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ . Comme leurs analogues électromagnétiques, les ondes gravitationnelles sont transverses ( $A_{\mu\alpha} k^{\alpha} = 0$ ) et leur quadrivecteur d'onde est de genre lumière ( $k_{\alpha} k^{\alpha} = 0$ ). A première vue, le tenseur d'amplitude d'ordre 2  $A_{\mu\nu}$  semble disposer de 16 degrés de liberté distincts. En réalité, on montre que ce tenseur en possède seulement deux [29], en tenant compte des considérations suivantes :

- Le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  est symétrique et par extension  $h_{\mu\nu}$ ,  $\bar{h}_{\mu\nu}$  et  $A_{\mu\nu}$  le sont aussi. On perd ainsi 6 degrés de liberté par symétrie pour le tenseur d'amplitude.

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu} \quad (2.7)$$

- En sélectionnant une classe particulière de système de coordonnées, appelée Transverse Traceless ( $TT$ ) (jauge transverse et sans trace), on élimine 4 degrés de liberté supplémentaires. Ce choix de jauge est réalisé par les contraintes suivantes :

$${}^{TT}A_{0i} = 0 \quad {}^{TT}A_{\alpha}{}^{\alpha} = 0 \quad (2.8)$$

- La condition de jauge de Lorentz de l'équation 2.2 élimine enfin les 4 degrés de liberté résiduels en terminant de fixer le système de coordonnées utilisé pour l'expression de  $\bar{h}_{\mu\nu}$ . Cette condition implique en particulier les contraintes suivantes sur  $A_{\mu\nu}$  :

$${}^{TT}A_{00} = 0 \quad {}^{TT}A_{ij}k^j = 0 \quad (2.9)$$

Dans ce système de coordonnées particulier, le tenseur d'amplitude ne possède plus que deux termes indépendants et s'écrit :

$${}^{TT}A_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_{\times} & 0 \\ 0 & A_{\times} & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Ces deux amplitudes  $A_+$  et  $A_{\times}$  correspondent à deux modes de polarisation indépendants de l'onde plane. De même que pour l'onde électromagnétique, cette expression révèle en fait que l'on peut décomposer l'onde plane  $\bar{h}_{\mu\nu}$  suivant deux états de polarisation linéaire  $\mathbf{e}_+$  et  $\mathbf{e}_{\times}$  tels que :

$${}^{TT}\bar{h}_{\mu\nu} = h_+\mathbf{e}_+ + h_{\times}\mathbf{e}_{\times} \quad (2.11)$$

Pour illustrer les propriétés de ces deux états de polarisation, on représente en général un anneau de particules tests soumises au passage d'une onde gravitationnelle dont le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est orthogonal à l'anneau. La perturbation de la métrique dans l'environnement de l'anneau provoque des forces de marée ondulantes entre les particules, déformant le cercle de manière caractéristique. Les deux états de polarisation de l'onde provoquent des déformations dans des directions distinctes et l'angle entre ces directions est de  $45^\circ$ . Cette propriété s'écarte cette fois-ci de l'exemple de l'électromagnétisme, pour lequel les états de polarisation linéaire sont orthogonaux. Cette différence s'explique du fait du caractère tensoriel d'ordre 2 de la métrique  $g_{\mu\nu}$ .

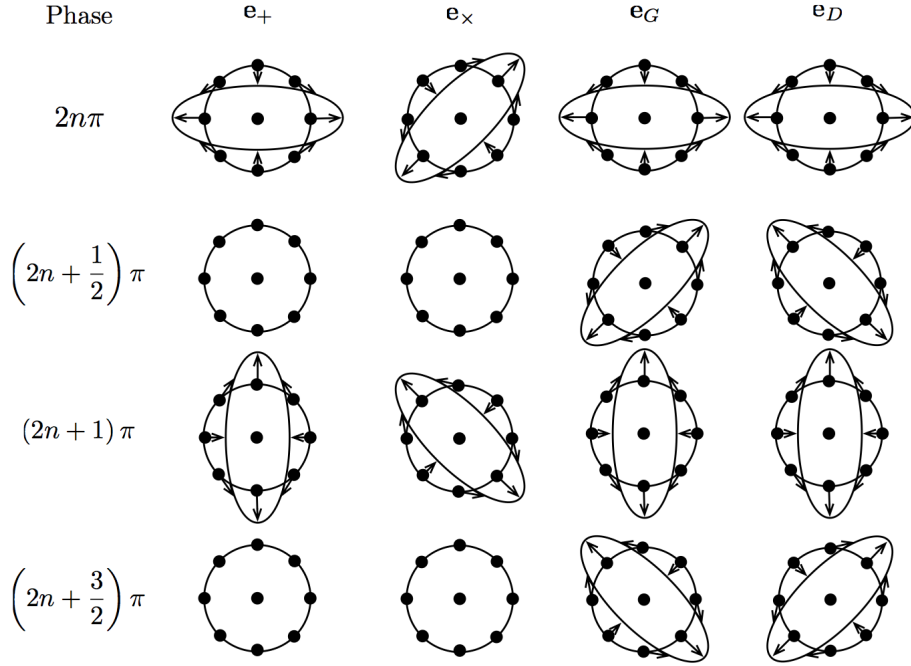


FIGURE 2.1 – Déformation induite par plusieurs ondes gravitationnelles, respectivement de polarisations linéaires  $\mathbf{e}_+$  et  $\mathbf{e}_\times$  ou circulaires gauche  $\mathbf{e}_G$  et droit  $\mathbf{e}_D$ , sur un anneau circulaire de particules test. Quatre états de phase de la déformation sont exposés. Image tirée de [29]

## 2.3 Génération des ondes gravitationnelles

Pour étudier la génération des ondes gravitationnelles, on doit résoudre l'équation des champs en 2.4 en présence de source. On peut montrer [22] que la solution générale (en jauge de Lorentz) de cette équation avec source s'écrit, de manière analogue au problème électromagnétique, comme la conséquence d'un potentiel retardé intégré sur toute la région occupée par les points de la source :

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(ct - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (2.12)$$

Ce retard est attribué à la source  $T_{\mu\nu}$  pour tenir compte de la non-instantanéité de la propagation du champ gravitationnel. Le vecteur  $\vec{x}$  donne la position à laquelle la perturbation de la métrique  $h_{\mu\nu}$  est étudiée tandis que  $\vec{y}$  localise le point de la source considéré dans l'intégration. Chaque point source localisé en  $\vec{y}$  et influant sur  $h_{\mu\nu}$  à l'instant  $t$  est décrit par  $T_{\mu\nu}$  à l'instant  $t - |\vec{x} - \vec{y}|/c$ , c'est-à-dire retardé de la quantité  $|\vec{x} - \vec{y}|/c$  équivalente au temps de propagation du champ entre  $\vec{y}$  et  $\vec{x}$ .

Pour une source compacte, cette solution générale prend une forme plus simplifiée. En effet, dans ce cas particulier, la distance notée  $r$  entre l'origine de notre système de coordonnées et le point  $\vec{x}$  considéré est en général très grande devant la taille caractéristique de la source. On peut alors profiter du développement limité du terme  $1/|\vec{x} - \vec{y}|$  qui donne au premier ordre :



$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \approx \frac{1}{r} \quad (2.13)$$

ce qui revient à considérer que chaque point de la source est situé à une distance identique  $r$  du point  $\vec{x}$  où l'on considère le champ  $h_{\mu\nu}$ . La solution devient alors :

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{4G}{c^4 r} \int T_{\mu\nu}(ct - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y}) d^3\vec{y} \quad (2.14)$$

et la suite de la résolution se résume à intégrer le tenseur énergie-impulsion retardé  $T_{\mu\nu}$  sur toute la région de la source, dont les divers éléments s'interprètent comme suit :

- $T_{00} = \rho$  est l'énergie de la particule considérée au point  $\vec{y}$  (ou densité d'énergie en  $\vec{y}$ ).
- $T_{0i} = T_{i0} = p_i$  est l'impulsion de la particule considérée au point  $\vec{y}$  (ou densité d'impulsion en  $\vec{y}$ ).
- $T_{ij} = T_{ji}$  sont des termes de contrainte interne de la source.

En sélectionnant le système de coordonnées du centre des impulsions, dans lequel par définition  $\int p_i d^3\vec{y} = \int T_{0i} d^3\vec{y} = 0$  on trouve :

$$\bar{h}_{00} = -\frac{4MG}{c^2 r} \quad \bar{h}_{0i} = \bar{h}_{i0} = 0 \quad (2.15)$$

Pour les 9 éléments du tenseur  $\bar{h}_{\mu\nu}$  restants, il est possible de démontrer [22] que :

$$\bar{h}_{ij} = -\frac{2G}{c^6 r} \left( \frac{d^2 Q_{ij}(ct - r)}{dt^2} \right) \quad (2.16)$$

où l'on a introduit la quantité tensorielle  $Q^{ij}$  appelée tenseur de moment quadrupolaire, terme d'ordre 2 du développement multipolaire de la distribution de densité d'énergie de la source

$$Q_{ij}(ct - r) = \int T_{00}(ct - r) y_i y_j d^3\vec{y} \quad (2.17)$$

On observe donc que pour une source compacte, on peut distinguer deux contributions de la source au champ lointain : un champ stationnaire  $\bar{h}_{00}$  associé à la masse totale  $M$  constante de la source et un champ variable  $\bar{h}_{ij}$  lié à l'évolution temporelle du moment quadrupolaire  $Q^{ij}$  de la source. C'est ce dernier terme qui

est responsable du rayonnement gravitationnel. En effet, comme en électromagnétisme, on peut décomposer la distribution angulaire de la densité de la source par une expansion multipolaire, à condition de se placer en un point  $\vec{x}$  suffisamment loin de la source pour que l'influence de sa taille soit négligeable sur le potentiel observé ( $|\vec{x} - \vec{y}| = r$ ). En électromagnétisme, le moment d'ordre 0, associé à la charge totale, se conserve et c'est la dérivée première du moment dipolaire de la distribution de charges électriques qui domine la génération du rayonnement. En revanche, pour le champ gravitationnel, le moment dipolaire de masse correspond à l'impulsion totale de la source qui est une quantité conservée pour un système isolé. Ce dernier terme ne peut donc pas être responsable de la génération d'une perturbation instationnaire telle qu'une onde gravitationnelle. Pour la gravitation, c'est bien le moment quadrupolaire qui intervient dans la génération des ondes gravitationnelles et en particulier sa dérivée seconde en temps. Dans le référentiel du centre des impulsions, on peut voir ce quadrupole comme le premier terme de perturbation à la sphéricité de la distribution de masse. Ainsi, toute distribution de masse sphérique admet un quadrupole nul et ne peut pas émettre de rayonnement gravitationnel.

## 2.4 Sources typiques

Une des propriétés remarquables du rayonnement gravitationnel est que l'amplitude rayonnée décroît en  $1/r$  avec la distance  $r$  entre le point d'observation et la source, là où son homologue électromagnétique diminue en  $1/r^2$ . Par l'observation de ces ondes, on a alors la possibilité d'observer et d'étudier des objets extrêmement lointain dans l'Univers, d'autant plus que les ondes gravitationnelles ont un couplage extrêmement faible avec la matière et se trouvent quasi-insensibles à tout obstacle matériel rencontré sur son parcours. En plus de potentiellement constituer un formidable outil de test de la théorie de la relativité générale et des descriptions concurrentes de la gravitation, elle ouvre la voie à une astronomie d'une toute nouvelle nature, que ce soit au niveau du principe de détection ou des phénomènes objets de l'observation : c'est l'astronomie de l'Univers gravitationnel.

Les sources d'ondes gravitationnelles sont typiquement les objets astrophysiques possédant une asymétrie variable dans le temps. C'est le cas par exemple des systèmes binaires de corps en orbite mutuelle, mais également d'un corps isolé qui voit sa symétrie sphérique perturbée par un phénomène physique quelconque, comme une vitesse de rotation importante (aplatissement au niveau de pôle) ou encore une déformation brutale du corps (supernova). Une telle génération peut aussi avoir une origine cosmologique (transition de phase de l'Univers primordial, collision de cordes cosmiques...) et le rayonnement est alors non-localisé. Dans cette section, on se concentre sur les objets binaires, principales sources d'étude pour le détecteur spatial *eLISA*.

Les binaires correspondent à un couple de corps en orbite l'un par rapport à l'autre. Les trajectoires orbitales poursuivies par ces deux corps sont responsables d'une asymétrie de distribution des masses du système qui évolue dans le temps. A

ce titre, toute binaire est génératrice de rayonnement gravitationnel, et l'intensité de la radiation en un point d'observation est liée à la masse des corps concernés et bien entendu à la distance entre ce point et la source. Durant son évolution, le système binaire perd de l'énergie par cette radiation et les objets se rapprochent petit à petit, réduisant la taille des orbites et augmentant la fréquence des révolutions. Par ailleurs, on peut montrer [29] que la fréquence de l'onde rayonnée est le double de la fréquence orbitale de la binaire. On distingue plusieurs catégories d'objet binaire en fonction notamment de l'importance de la masse des corps qu'il contient (trous noirs supermassifs, trous noirs, étoiles à neutrons, naines blanches...) et du rapport entre les masses des deux objets concernés.

### **2.4.1 Binaires de faible rapport de masse**

Les objets mis en jeu dans ce système possèdent des masses d'ordre équivalent. L'évolution d'un tel système peut se décomposer en trois phases, chacune d'entre elles nécessitant une approche particulière pour la construction de la forme d'onde générée. En effet, la complexité du problème augmente singulièrement en fonction du régime dans lequel se trouve le système, comme par exemple en présence d'un champ gravitationnel fort (le développement du chapitre précédent étant alors remis en cause) ou impliquant des vitesses relatives nécessitant une description relativiste de la source. Ces trois phases sont les suivantes :

**La phase spirale :** c'est le stade initial et le plus long de la vie d'un système binaire. Les deux corps orbitent de manière régulière l'un autour de l'autre en rayonnant constamment. Les radiations emportent de l'énergie au système qui se resserre progressivement, réduisant d'autant la fréquence de l'onde émise. Cette phase est en général décrite par un modèle appelé *modèle postnewtonien*. Dans ce modèle, une approximation des équations d'Einstein est obtenue par expansion du modèle newtonien augmenté d'un nombre variable de termes correctifs relativistes, dépendant du rapport entre la vitesse des corps du système et la vitesse de la lumière.

**La phase de coalescence :** c'est le stade où les deux corps entament leur fusion. On se situe dans ce cas en régime de champ gravitationnel fort et les équations linéarisées ne sont alors plus suffisantes. Il est nécessaire de recourir à une résolution numérique des équations d'Einstein.

**Le ring down :** c'est la phase finale où les deux corps ont terminé leur fusion. Le corps unique qui en résulte se stabilise progressivement tout en présentant des vibrations, sources d'ultimes radiations qui s'estompent peu à peu.

Cette classe de systèmes binaires est ensuite divisée en sous-catégories, en fonction de la nature et surtout de la masse des objets impliqués.

## Binaires de trous noirs supermassifs

Divers observations paraissent indiquer qu'une grande partie des galaxies dans l'Univers possèdent vraisemblablement un trou noir en leur sein, dont la masse est estimée entre un million et un milliard de fois la masse du Soleil [34]. Ces corps exceptionnellement massifs rentrent dans la catégorie des trous noirs supermassifs. Par ailleurs, de multiples observations semblent montrer que la collision et la fusion de galaxies constituent des événements relativement communs dans l'Univers. De tels

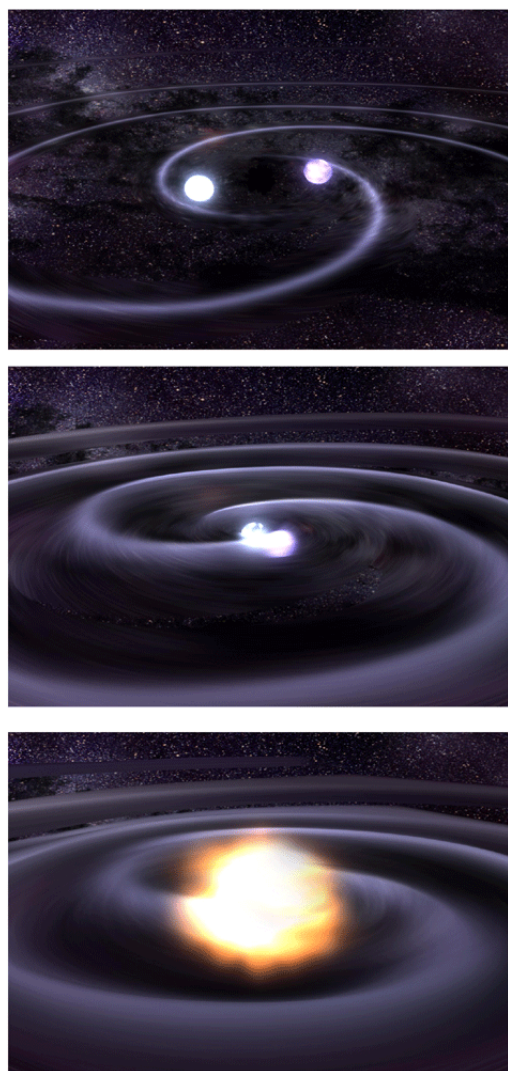


FIGURE 2.2 – Illustration des différentes phases de l'évolution d'un système binaire de faible rapport de masse (ici une binaire de naines blanches). Credit : NASA/Dana Berry, Sky Works Digital

événements catastrophiques, impliquant des galaxies à trou noir central, pourrait donc être à l'origine de la formation récurrente de systèmes binaires de trous noirs supermassifs. Ces systèmes binaires, assurément extrêmement éloignés de tout observateur potentiel, émettent néanmoins dans la phase de coalescence une quantité d'énergie de radiation colossale, faisant probablement de ces systèmes les sources les plus lumineuses de l'Univers. Pour une partie de ces systèmes, la fréquence de l'onde gravitationnelle émise lors de la dernière orbite stable des trous noirs se trouvera dans la bande de fréquence observable par le détecteur spatial *eLISA*. Leur observation constitue un des objectifs principaux de la mission spatiale.

## Binaires de masse standard

La plupart des sources potentielles pour la mission *eLISA* seront des systèmes binaires de masse intermédiaire, tels des systèmes constitués de trous noirs stellaires, d'étoiles à neutrons ou de naines blanches, formés après effondrement d'une étoile, d'objets moins compacts comme des étoiles, voire des systèmes mixtes comportant deux entités astrophysiques de nature différente. Il se trouve que la majorité des étoiles dans l'Univers possèdent au moins un compagnon avec lequel elles forment un système multiple. Environ la moitié de ces systèmes [40] se forment avec une interdistance suffisante pour évoluer en système compact et prétendre à l'émission de radiations détectables par l'observatoire spatial. En revanche, l'émission d'une binaire de masse modérée est de faible amplitude et son observation par le détecteur spatial *eLISA* nécessite une plus grande proximité que pour les trous noirs supermassifs, ce qui localise ces sources dans l'environnement proche du système solaire, voire pour les plus lumineuses, dans l'ensemble de la Voie Lactée. Elles rentrent donc dans la catégorie des binaires galactiques.

La grande majorité de ces systèmes binaires ne seront pas individuellement résolubles au travers de la réponse du détecteur spatial. En effet, la faible amplitude de leur signal et leur multitude préviennent d'une identification claire du signal de l'une de ces binaires parmi l'ensemble des radiations gravitationnelles observables qui se superposent dans la réponse du détecteur. On dit que les radiations de ces sources irrésolubles forment alors le fond stochastique galactique. Cependant, certaines d'entre elles, les plus brillantes ou les plus proches, seront identifiables et on estime que la mission *eLISA* parviendra à en détecter individuellement quelques milliers [40]. Plusieurs d'entre elles ont déjà été découvertes par l'astronomie électromagnétique traditionnelle, et joueront ainsi le rôle de binaires de vérification pour l'observatoire *eLISA*.

### 2.4.2 Binaires de rapport de masse extrême

Le coeur de nombreuses galaxies semble posséder un trou noir supermassif. Dans ces régions galactiques centrales, on trouve également toute une population stellaire, de masse moyenne relativement importante, susceptible d'aboutir à la formation

d'objets compacts, tels des trous noirs. On voit alors se former des systèmes binaires, de rapport de masse conséquent, constitués d'un trou noir central de quelques millions de masses solaires accompagné d'objets compacts, de type trou noir, étoile à neutrons ou naine blanche, d'une dizaine de masses solaires (les objets non compacts se voient rapidement déchiquetés par les forces de marée considérables à proximité de l'objet supermassif central).

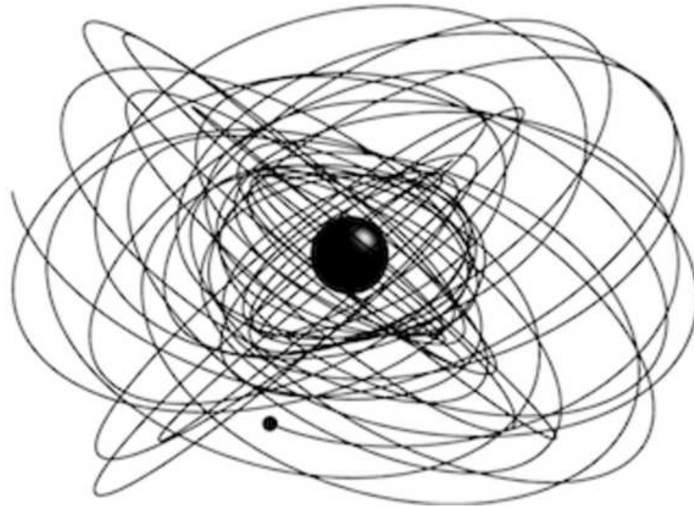


FIGURE 2.3 – Illustration de la trajectoire complexe d'un trou noir stellaire en phase spirale autour d'un trou noir supermassif. Le mouvement orbital du plus petit corps est fortement relativiste. Image tirée de [37]

En plus d'être source d'informations sur l'environnement et la population stellaire des coeurs galactiques, ce système binaire constitue un laboratoire d'étude attrayant en ce qui concerne les lois de la gravitation. Le corps de faible masse, dont l'incidence sur la courbure spatio-temporelle est très faible en comparaison avec le corps central, sonde littéralement la géométrie de l'espace-temps dans l'environnement du trou noir supermassif. L'analyse des ondes gravitationnelles détectées fournirait indirectement des informations sur la géodésie du petit objet autour du corps central, et par conséquent, la structure environnante de l'espace-temps. Ces observations pourraient alors constituer un formidable test de la relativité générale en champ fort et mettre également à l'épreuve d'autres théories relativistes de la gravitation en compétition. Cependant, l'étude théorique de ces systèmes peut s'avérer d'une grande complexité, mêlant à la fois gravitation en champ fort et phénomènes ultra-relativistes.

## 2.5 Principe de détection

Il existe deux grandes approches distinctes pour détecter les effets d'une onde gravitationnelle. La première, actuellement sujet de l'effort de nombreux laboratoires et collaborations à travers le monde, se concentre sur la variation de la distance relative entre deux particules test libres soumises aux forces de marée oscillantes que repré-

sente le rayonnement gravitationnel (cf. figure 2.1). Cette approche est entreprise par de nombreuses expériences au sol, tel le détecteur terrestre Virgo en Italie, fruit d'une collaboration franco-italienne, les détecteurs américains Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (*LIGO*) (dont les nouvelles générations Advanced Virgo et *LIGO* sont dans leurs ultimes phases de préparation) ou la précédente génération de détecteur comme l'expérience GEO en Allemagne. La seconde approche, d'existence plus ancienne, recourt à des particules non-libres mais qui composent un corp élastique, qui sous l'effet des forces de marée, va être le théâtre de vibrations d'autant plus intenses que la fréquence de l'onde interceptée correspond à une fréquence de résonance caractéristique du corps. Ce principe de détection est utilisé dans les expériences des *barres de résonance*, dont le physicien Joseph Weber a été le pionnier dès le début des années 60.

A ce jour, aucune détection n'a été confirmée par ce système de barres résonantes, ni-même d'ailleurs par n'importe quelle expérience de détection directe. La tendance actuelle semble nettement favoriser la première approche et selon les dernières prévisions, la nouvelle génération de détecteurs, Advanced Virgo et Advanced *LIGO*, devrait atteindre un niveau de sensibilité suffisant à une détection claire et probable d'une onde gravitationnelle d'ici la fin de la décennie. Le détecteur spatial *eLISA*, quant à lui, implique la première approche de détection et son lancement est actuellement prévu pour 2034. Dans cette section, on se concentre donc en particulier sur cette première approche, principe de détection impliquant le mouvement relatif de particules libres.

On étudie l'effet du passage d'une onde gravitationnelle sur deux particules test libres. Dans la jauge  $TT$ , les coordonnées spatiales  ${}_1X^i$  et  ${}_2X^i$  de ces deux particules test se maintiennent constantes, et les particules sont toutes deux au repos dans ce système de coordonnées, ce malgré l'action de l'onde. En réalité, on peut montrer que le système de coordonnées choisi est un référentiel qui suit le mouvement des particules individuelles [22]. Il en est de même pour le vecteur spatial  $\zeta^\mu = (0, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$  de séparation physique entre les deux particules qui demeure invariant malgré la propagation de l'onde. En revanche, la métrique sur laquelle repose la définition de la distance physique  $l$  est, quant à elle, instationnaire. Cee séparation spatiale physique est définie comme :

$$l^2 = (\delta_{ij} - {}^{TT}h_{ij}) \zeta^i \zeta^j \quad (2.18)$$

où le tenseur métrique euclidien se trouve perturbé par le terme ondulatoire  ${}^{TT}\bar{h}_{ij}$ , alors qu'en l'absence de radiation, la distance de séparation est simplement définie par  $l_0^2 = \delta_{ij} \zeta^i \zeta^j$ . On en déduit alors, au premier ordre, la variation relative de la distance de séparation physique entre les particules libres, en introduisant le vecteur unitaire  $n^i$  colinéaire au vecteur de séparation  $\zeta^i$  :

$$\frac{\delta l}{l_0} = -\frac{1}{2} {}^{TT}h_{ij} n^i n^j \quad (2.19)$$

Le passage de l'onde gravitationnelle va se traduire par une force de contrainte linéaire apparente, responsable de l'oscillation de la distance physique de séparation des particules, dont l'amplitude est proportionnelle à la distance au repos. Pour des sources astrophysique typiques, les contraintes potentiellement observables sur Terre sont de l'ordre de :

$$\frac{\delta l}{l_0} \approx 10^{-21} \quad (2.20)$$

Ce qui signifie que pour des particules test séparées d'un kilomètre, on peut espérer une variation  $\delta l$  de séparation physique de l'ordre de  $10^{-18}\text{m}$ ... soit un cent millionième de la taille caractéristique des atomes constituant ces mêmes particules test ! En revanche, pour le détecteur spatial *eLISA*, la distance au repos entre les particules test est bien plus large, typiquement de l'ordre du million de kilomètres, ramenant cette variation de distance observable à 1pm. Cette variation reste néanmoins infime, d'autant plus en comparaison avec l'envergure du détecteur spatial, en représentant seulement un centième de la dimension typique d'un atome.

Les techniques d'interférométrie laser permettent d'atteindre de telles précisions de mesure de déplacement. Ainsi, le principe de détection de la mission *eLISA* consiste à construire un interféromètre spatial gigantesque, de longueur de bras d'environ un million de kilomètres, à chaque extrémité desquels sont placées deux masses d'épreuve, supposées en chute libre à l'intérieur des satellites les contenant. Les faisceaux laser traversant chaque bras verront leur chemin optique modifié par la traversée d'une onde gravitationnelle dans le détecteur, et la différence de marche induite et observée entre les deux bras renseignera des propriétés de l'onde. Une description plus fournie du détecteur spatial *eLISA* est discutée au chapitre suivant.



# Chapitre 3

## Le détecteur spatial eLISA

Initialement issu d'une collaboration ESA-NASA, alors dénommé Laser Interferometer Space Antenna (*LISA*) et comportant 3 bras de 5 millions de kilomètres, le projet devient en 2012 *eLISA*, conduit par l'agence spatiale européenne. Le thème scientifique qu'il supporte, l'Univers Gravitationnel, a en 2013 été sélectionné comme thème prioritaire pour la mission large L3 de l'ESA, dont le lancement est prévu autour de 2034. Une première mission de démonstration technologique, appelée *LISA Pathfinder* (*LPF*), sera lancée en Octobre 2015, et tentera de démontrer la faisabilité technique d'une telle expérience en testant en condition spatiale une partie importante de la technologie envisagée pour la réalisation de l'observatoire spatial.

Le détecteur *eLISA* est constitué d'une constellation de trois satellites en orbite autour du Soleil, en formation triangulaire quasi-équilatérale, développant alors deux bras interférométriques de longueur d'environ un million de kilomètres (cf. figure 3.1). Le barycentre de la constellation suit la trajectoire orbitale de la Terre avec un délai angulaire autour de  $20^\circ$ , et le plan dans lequel elle s'inscrit s'écarte d'un angle de  $60^\circ$  avec le plan écliptique. Dans ce plan, la constellation décrit une rotation quasi-constante de même pulsation que le mouvement de révolution du triangle ( $2\pi/1an$ ). La constellation est constituée d'un satellite "*Mère*", à la jonction des deux bras interférométriques, et de deux satellites "*Fille*" à la seconde extrémité des deux bras. Il en résulte une configuration interférométrique en "V", les deux bras décrivant au niveau de la jonction un angle moyen de  $60^\circ$  (cf. figure 3.2). En réalité, cet angle observe des fluctuations causées principalement par le choix des orbites, qui ne peut satisfaire complètement les exigences d'équilatéralité de la formation en triangle.

Cette respiration du triangle, à très basse fréquence, accompagnée de l'agitation angulaire du satellite, perturbe le pointage des satellites lors du processus de réception et d'émission laser de l'interféromètre. Chaque satellite est équipé de deux télescopes pour la réception et l'émission du lien laser intersatellite, dont l'orientation relative nominale est de  $60^\circ$ . Ces télescopes sont éventuellement mobiles, permettant un écart à l'angle relatif nominal de  $\pm 1,5^\circ$  [31], afin d'adapter le pointage à la respiration du triangle. De plus, le système de micropropulsion du satellite est aussi utilisé pour corriger l'attitude du satellite afin de permettre l'alignement des téles-

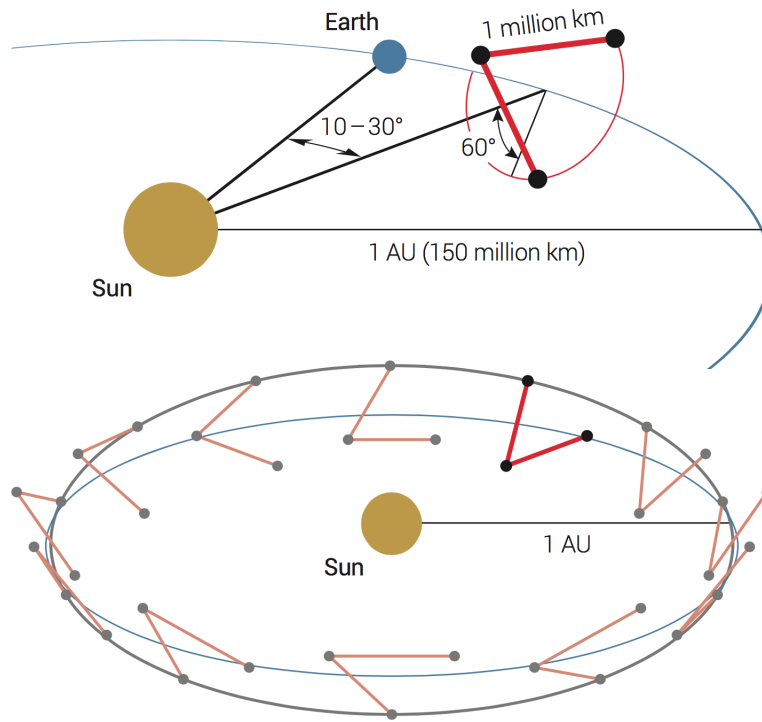


FIGURE 3.1 – Trajectoire orbitale de la constellation des trois satellites formant un interféromètre spatial à deux bras d'un million de kilomètres. Le barycentre de la constellation suit approximativement l'orbite terrestre avec un délai angulaire de quelques dizaines de degrés. La formation décrit un triangle quasi-équilatéral [40].

copies distants aux deux extrémités du bras laser. Ce système se compose d'un jeu de douze micropropulseurs à éjection de gaz froid délivrant des forces de propulsion de l'ordre du micronewton. La micropropulsion est également sollicitée pour ajuster la position des masses de référence dans le satellite (cf. section 3.2).

Du fait de phénomènes de diffraction en sortie du télescope émetteur, le faisceau laser diverge légèrement et son long cheminement jusqu'au satellite récepteur étend alors sa largeur à l'arrivée sur plusieurs kilomètres [41], où la puissance reçue est d'environ 280pW pour une puissance en émission de 2W [31]. A la réception, le faisceau est intercepté par un miroir primaire à l'intérieur du télescope, puis réfléchi à nouveau par un miroir secondaire, pour être finalement dirigé vers le banc optique, attaché perpendiculairement à l'axe du télescope et dont les composants optiques font face au miroir primaire (cf. figure 3.3). Le module appelé Gravitational Reference Sensor (*GRS*) se situe derrière le banc optique. Il est lié sur le même support mécanique que ce dernier. Ce module, l'un des coeurs du principe de détection, est notamment composé d'un compartiment contenant les masses libres de référence et tout un système de mesure et d'actuation électrostatique nécessaire au contrôle des masses de référence au sein de leur logement.

Le principe de détection consiste à mesurer le déplacement relatif des satellites dû au passage d'une onde gravitationnelle. Ce déplacement induit une variation de chemin optique des liens laser et l'étude de la différence de marche entre les bras de

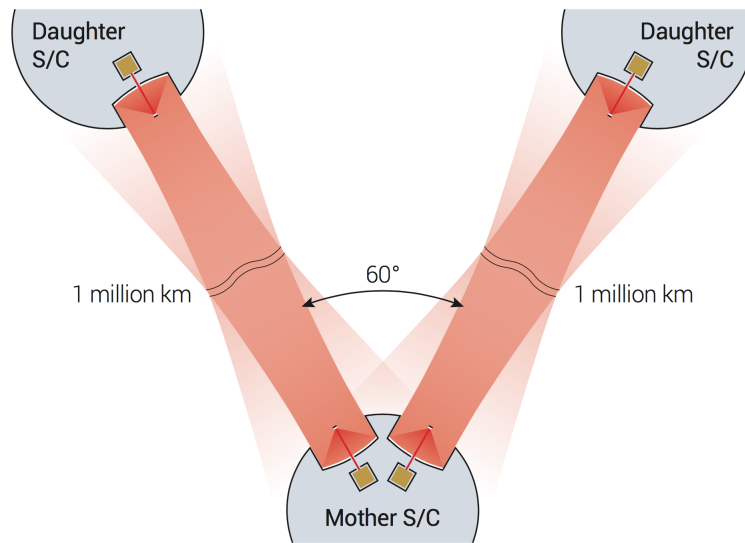


FIGURE 3.2 – La constellation est constituée d’un satellite “Mère”, à la jonction des deux bras interférométriques, et de deux satellites “Fille” à la seconde extrémité des deux bras. Les faisceaux laser échangés entre les satellites sont interceptés et transmis par l’intermédiaire de télescopes. La diffraction en sortie des télescopes aboutit à une largeur de faisceau en réception de quelques kilomètres, en raison de la distance considérable qui sépare les satellites [40].

l’interféromètre renseigne des forces de marée subies par le détecteur et donc des propriétés de l’onde détectée. Cependant, les satellites représentent de piètres références d’inertie et sont soumis à d’importantes accélérations (vent solaire, champs magnétiques, bruit des micropropulseurs...), du moins en comparaison avec les exigences de précision. On utilise alors des masses cubiques comme références d’inertie flottant librement à l’intérieur du satellite. Ces masses sont protégées des forces perturbatrices extérieures par le bouclier que forme le satellite autour d’elles. L’accélération du satellite suivant l’axe optique du lien laser, axe suivant lequel on souhaite mesurer le déplacement et appelé par la suite *axe sensible*, peut alors être retranchée par l’intermédiaire de la mesure de la distance relative entre la masse d’épreuve et le satellite. De manière équivalente, cette composition revient à étudier le déplacement relatif entre les masses d’épreuve distantes et jointes par l’intermédiaire du lien laser, ces masses représentant alors les particules test de la section 2.5. La mesure de déplacement se décompose donc en trois mesures distinctes sur un même lien laser : la mesure du déplacement intersatellite et les deux mesures de la position relative entre chaque satellite et sa masse d’épreuve (impliquée dans le lien laser considéré).

Bien entendu, ce schéma de principe n’est rigoureusement valable que si les masses d’épreuve sont des références d’inertie idéales, c’est-à-dire soumises à aucune accélération. En pratique, ce ne sera pas le cas, et inévitablement des forces perturbatrices s’exerceront sur les masses d’épreuve, comme un bruit d’accélération. Ce bruit s’introduit alors dans la mesure comme un bruit de déplacement qui peut être confondu avec l’effet de l’onde gravitationnelle. Il s’ajoute à cette source de bruit toutes les imperfections éventuelles liées au système de mesure interférométrique, comme par exemple les bruits du banc optique, du phasemètre ou des horloges. Il est habituel de distinguer dans le détecteur les bruits d’origine optique des bruits

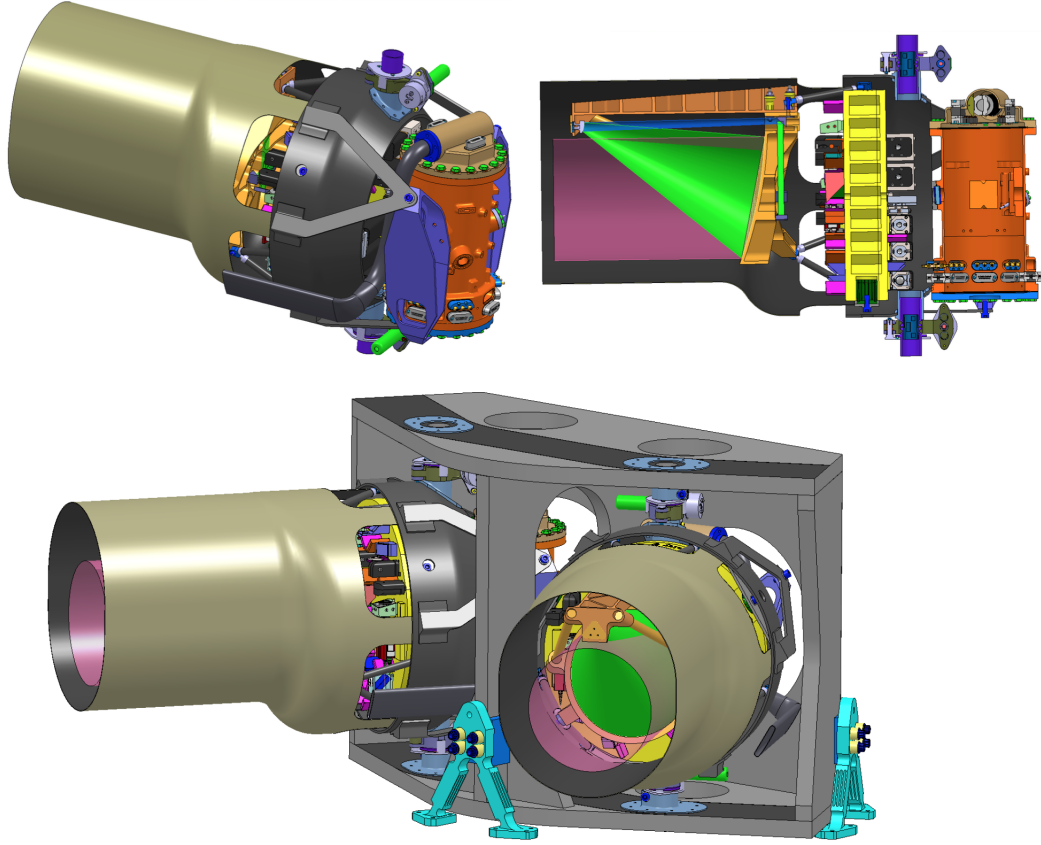


FIGURE 3.3 – Illustration du montage optique. Les télescopes reçoivent le faisceau distant qui est réfléchi successivement par deux miroirs primaires et secondaires, puis dirigé vers le banc optique (dont le support est en jaune), attaché au télescope perpendiculairement à l'axe de ce dernier. L'enceinte cylindrique (en orange) correspond au GRS et renferme la masse d'épreuve. Sur le satellite "Mère", les deux télescopes sont écartés d'un angle nominal de  $60^\circ$  pouvant varier de  $\pm 1,5^\circ$ . Image tirée de [31].

d'accélération s'exerçant sur les masse d'épreuve.

### 3.1 Mesure interférométrique

Dans un interféromètre Michelson classique, un faisceau laser incident est séparé en deux faisceaux secondaires par division d'amplitude. Ces deux faisceaux secondaires parcourent deux trajets optiques distincts, appelés bras interférométriques, sont réfléchis par des miroirs à l'extrémité de ces bras, pour faire chemin inverse avant recombinaison des faisceaux. Pour *eLISA*, ce schéma est rendu impossible par la faible puissance du faisceau laser en réception, d'environ 280pW. Après un trajet retour d'un million de kilomètres parcouru par ce faisceau, déjà très atténué, seulement quelques photons par semaine seraient retournés au satellite. Une autre stratégie est donc envisagée pour *eLISA* [31]. Les satellites à chaque extrémité des bras opèrent tels des transpondeurs, c'est-à-dire en réceptionnant, amplifiant et renvoyant le signal laser. Un faisceau laser est envoyé du satellite "Mère" au satellite

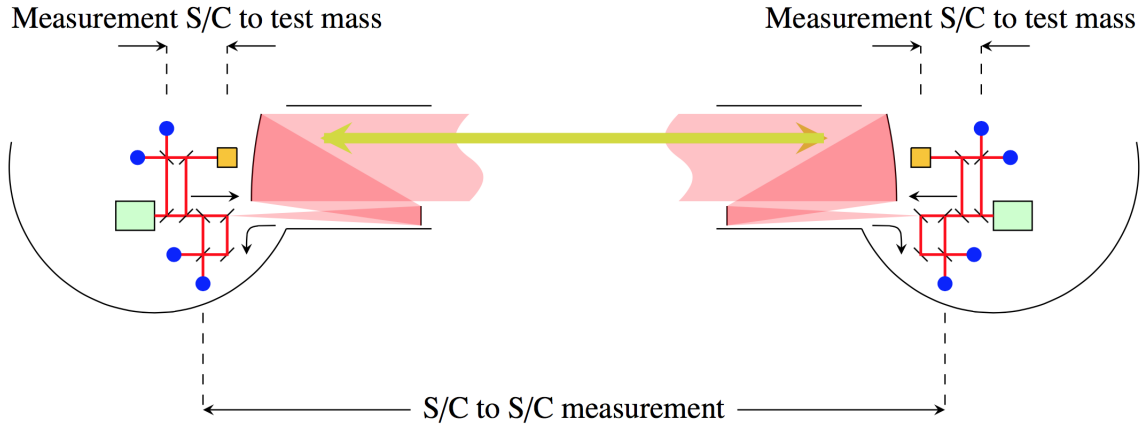


FIGURE 3.4 – Décomposition en trois morceaux du bras interférométrique. Trois interféromètres distincts sont utilisés pour les mesures de déplacement {Satellite-Satellite}, {Masse d'épreuve-Satellite} et {Satellite-Masse d'épreuve}. La recombinaison de ces signaux, précaution prise des délais temporels existants dus au temps de propagation du faisceau laser, permet de reconstruire le bras interférométrique [31]

"Fille", ce dernier recevant un signal de très faible puissance. Dans le satellite "Fille", un laser local est asservi en phase sur le signal rentrant et crée une réplique amplifiée du signal qui est renvoyée au satellite "Mère". A nouveau, dans le satellite "Mère", la phase du signal rentrant est comparée avec celle du laser local. Le même procédé est effectué sur les deux bras et les phases des deux lasers locaux du satellite "Mère" sont comparées.

Les mesures d'interférométrie réalisées dans chaque satellite sont basées sur le principe d'interférométrie hétérodyne, où l'on fait interférer deux faisceaux laser observant un faible écart de fréquence  $\Delta\nu$ . De cette interférence résulte un signal de battement, typiquement en  $\sin(2\pi f_{het}t + \phi(t))$ , de fréquence  $f_{het} = \Delta\nu$ , dont le terme de modulation de phase  $\phi(t)$ , finalité de la mesure, témoigne de la fluctuation de différence de marche entre les bras interférométriques. La combinaison des faisceaux est observée sur des photodétecteurs à quadrants. La présence de plusieurs quadrants permet d'effectuer à la fois des mesures de déplacements angulaires, en comparant l'état de phase de la superposition des faisceaux sur chaque quadrant, et des déplacements en translation en réalisant la moyenne des signaux reçus par les différents quadrants, simulant ainsi la réponse d'un photodétecteur unique [31]. Chaque mesure interférométrique est réalisée indépendamment par deux photodétecteurs, fournissant ainsi une redondance d'observation qui permet d'augmenter le rapport signal sur bruit. Les diverses mesures interférométriques prenant place dans un satellite sont les suivantes :

- **L'interféromètre scientifique** : Il mesure la distance entre les bancs optiques distants aux deux extrémités d'un lien laser. Au niveau des bancs optiques, le signal laser réceptionné en provenance du satellite distant interfère avec un laser local, provenant de la source primaire (cf. figure 3.5), et produit un signal de battement entre 5 et 25MHz qui est détecté par les

photodiodes à quadrant et dont la phase est mesurée par un phasemètre électronique. La variation temporelle de cette phase témoigne du décalage fréquentiel, par effet Doppler, du signal reçu par le satellite du fait de la vitesse relative fluctuante entre les satellites joints par le lien laser. Ce signal contient donc, entre outre, l’empreinte de l’onde gravitationnelle recherchée, mais aussi celles de la respiration de la constellation ou des forces perturbatrices appliquées aux satellites, chacune d’entre elles intervenant dans divers domaines de fréquence.

- **L’interféromètre local** : Il est dédié à la mesure du déplacement du satellite par rapport à sa masse d’épreuve, référence d’inertie pour le satellite. Un faisceau laser est dirigé à travers le banc optique jusqu’au module *GRS* situé à l’arrière du banc optique, où il est réfléchi par les masses d’épreuve qui le renvoient vers le banc optique. Le faisceau de référence est obtenu à partir de la source laser secondaire (cf. figure 3.5). Cette mesure interférométrique renseigne à la fois des déplacements en translation et en rotation de la masse d’épreuve dans son compartiment grâce aux différentes mesures de phase permises par les quadrants des photodétecteurs.
- **L’interféromètre de référence** : Il fournit des informations sur les différences de caractéristiques entre les deux émissions lasers primaires et secondaires utilisées pour chaque banc optique, en particulier sur les bruits de fréquence des deux faisceaux. Cet interféromètre n’est pas représenté dans la figure 3.5.

Différents points de mesure interférométrique sont ainsi répartis dans le détecteur et réalisés à partir de sources lasers distinctes et donc incohérentes. Pour cette dernière raison, le bruit de fréquence laser des sources domine très largement tout signal potentiellement observable. Pour contourner ce problème, l’idée est de reconstituer a posteriori, par recombinaison des différentes mesures de phase réalisées, un interféromètre de type Michelson équivalent à deux bras, aux extrémités desquels les masses d’épreuve représentent les miroirs [33]. Les deux bras interférométriques virtuels équivalents issus de cette combinaison s’apparentent à des faisceaux cohérents que l’on fait interférer numériquement, et l’on arrive de cette manière à éliminer l’influence du bruit de fréquence laser. La principale difficulté de cette stratégie réside dans la gestion des délais temporels pour la combinaison des signaux interférométriques. En effet, le faisceau laser intersatellite parcourt environ un million de kilomètres avant d’atteindre le satellite distant, ce qui correspond à un temps de parcours proche de 3,3s, durée d’ailleurs soumise à des fluctuations notamment dues à la respiration de la constellation. La technique mettant en oeuvre ce programme de traitement des données est appelée Time Delay Interferometry (*TDI*).

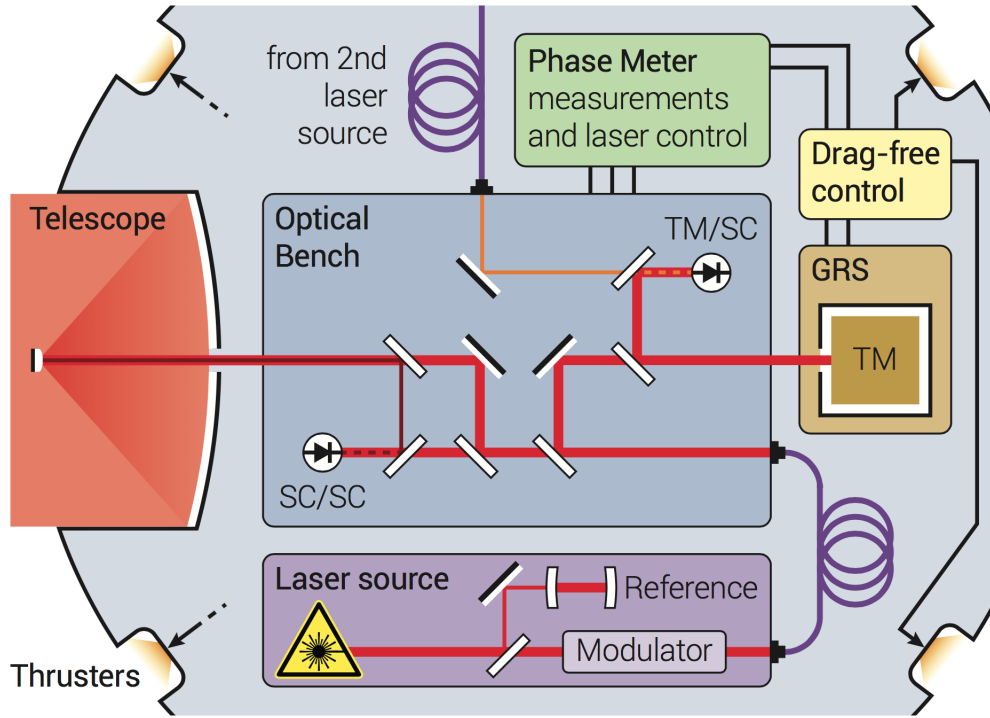


FIGURE 3.5 – Schéma illustrant les différents interféromètres au sein d'un satellite. Le faisceau laser intersatellite est collecté par le télescope, puis conduit pour interférence hétérodyne avec un faisceau laser local primaire. Un laser local secondaire est utilisé pour construire l'interféromètre local qui mesure le déplacement de la masse d'épreuve dans le GRS. Un troisième interféromètre dit de référence, non représenté sur la figure, est utilisé pour comparer les états d'émission des faisceaux laser primaire et secondaire (mesure du bruit de fréquence). Figure tirée de [40].

## 3.2 Module "Gravitational Reference Sensor" (GRS)

Le *GRS* est le module dédié à la gestion de la référence d'inertie du satellite. Il contient une masse d'épreuve en chute libre dans un compartiment cubique dont les parois intérieures sont recouvertes d'électrodes. Les masses d'épreuve sont de forme cubique de 46mm de côté et de masse  $m_T = 1,96\text{kg}$ , faites d'un alliage d'environ 73% d'or et 27% de platine sélectionné pour minimiser sa susceptibilité magnétique. Les masses d'épreuve sont recouvertes d'une pellicule d'or pour assurer une bonne réflectivité du matériau, propriété utilisée pour réfléchir le faisceau laser de l'interféromètre local. Les électrodes recouvrant le compartiment et la masse d'épreuve conductrice forme un ensemble de capacités qui permettent à la fois la mesure de la position des masses dans leur logement et l'application de forces électrostatiques pour la correction de cette position, aussi bien en translation qu'en orientation. À l'état nominal, les masses d'épreuve sont centrées dans leur logement cubique et l'écart entre chaque paroi et la surface de la masse lui faisant face est d'environ 4mm.

Les masses d'épreuve sont contenues dans des compartiments sous vide sans contact direct, du moins autres que l'interaction électrostatique exercée par les électrodes ou les sources de perturbations parasites. Il est néanmoins nécessaire de ga-



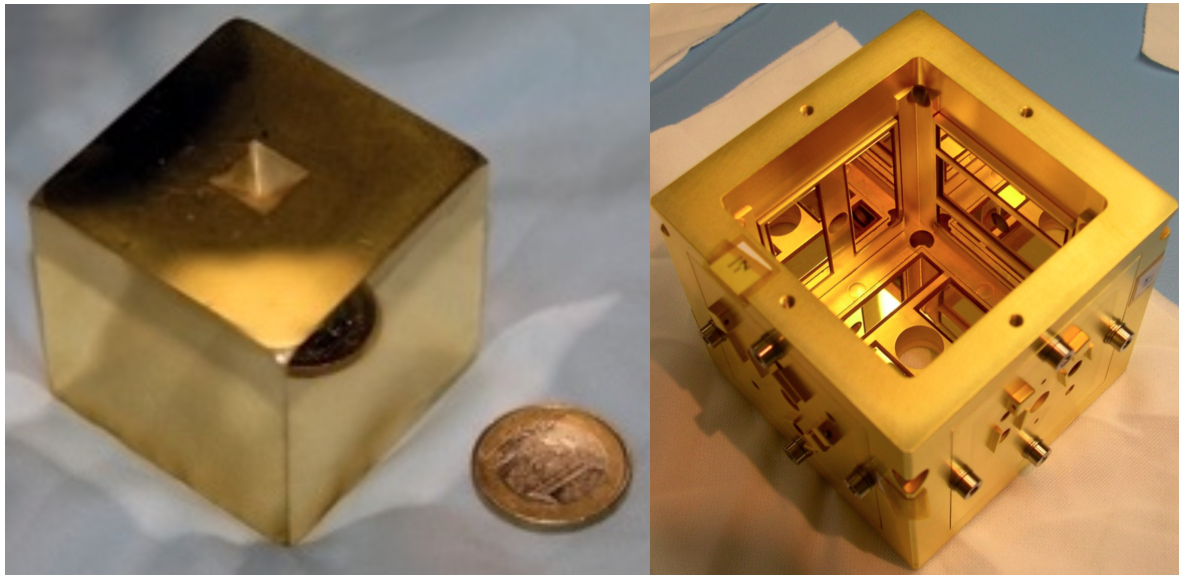


FIGURE 3.6 – **A gauche** : photographie d'une masse d'épreuve de l'expérience LPF. Ces masses de 1,96kg et de 46mm de côté sont faites d'un alliage d'environ 73% d'or et 27% de platine et recouvertes d'une pellicule d'or. **A droite** : Compartiment électrostatique de l'expérience LPF dans lequel est logé la masse d'épreuve. Ses parois intérieures sont recouvertes d'un système d'électrodes formant avec la surface de la masse de référence un ensemble de capacités utilisé pour le contrôle de la position de cette dernière.

rantir le bon positionnement des masses d'épreuve dans leur compartiment durant toute la mission, qui sans contrôle, serait amené à évoluer par des forces perturbatrices ou même par la différence de géodésie entre le satellite et la masse d'épreuve. Afin d'assurer la qualité de référence d'inertie des masses d'épreuve suivant les liens laser de l'interféromètre spatial, les actuations le long des axes sensibles doivent être minimales. Ainsi, pour le contrôle des masses d'épreuve suivant l'axe des télescopes, on utilise le système de micropropulsion du satellite : c'est la stratégie de contrôle dite de *Drag-Free*. Le recentrage des masses d'épreuve dans leur compartiment suivant cet axe est réalisé par la mise en mouvement du satellite relativement aux masses, en utilisant deux des degrés de liberté dynamiques de translation du satellite. On contraint les autres degrés de liberté dynamiques des masses d'épreuve à l'aide des forces électrostatiques de l'ordre du nanonewton générées par le système de capacités : c'est la stratégie de contrôle dite de *Suspension*. On surveille la position et l'orientation des masses par deux systèmes de mesure distincts l'un optique de précision picométrique, avec l'interféromètre local discuté en 3.1 et l'autre électrostatique de précision nanométrique, grâce au système d'électrodes déployé dans le compartiment. Le système optique s'occupe de la mesure du déplacement des masses d'épreuve suivant l'axe des télescopes et de leur déplacement angulaire autour des deux autres axes perpendiculaires aux faces de la masse. Les senseurs capacitifs sont utilisés pour les degrés de liberté restants.

Malgré tous les efforts de ce système pour préserver les masses d'épreuve d'actuations directes suivant les axes sensibles, diverses forces de perturbations viendront détériorer la qualité de référence d'inertie que possèdent ces masses. Comme men-



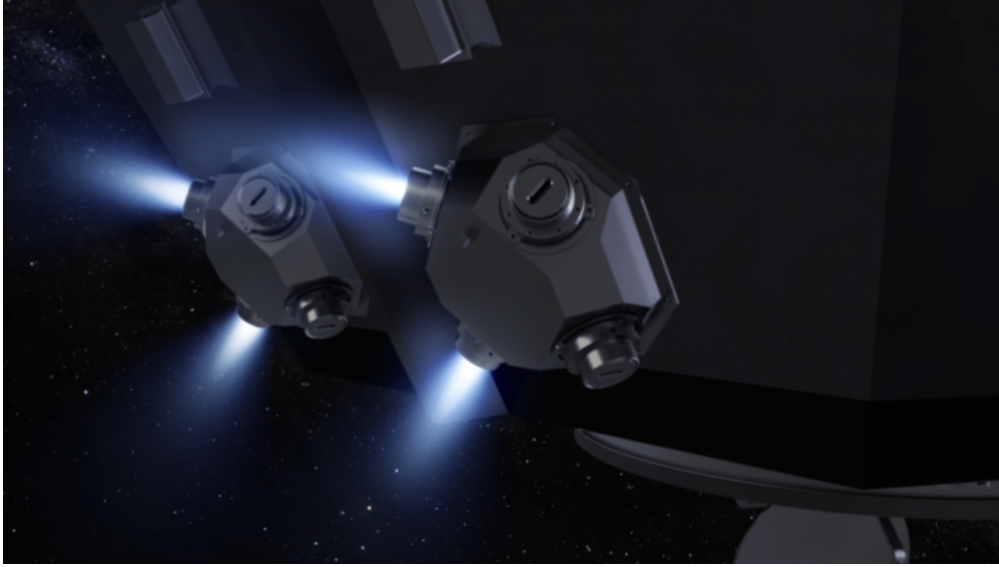


FIGURE 3.7 – Impression d’artiste du système de micropropulsion utilisé sur un satellite de la mission *eLISA*. Crédit : AEI/MM/exozet

tionné précédemment, ces perturbations induiront un bruit d’accélération sur les masses d’épreuve pouvant imiter les effets d’une onde gravitationnelle sur la mesure de la séparation physique entre les deux masses d’épreuve distantes. L’objectif du travail présenté ici est d’évaluer, à partir des caractéristiques des divers systèmes de mesure et d’actuation impliqués dans le *GRS*, le niveau de bruit d’accélération observé sur les masses d’épreuve. A cet effet, un simulateur qui tente de reproduire l’activité du *GRS* a été développé. Un modèle en boucle fermée représentant la dynamique des masses d’épreuve, les systèmes de mesure et d’actuation et les forces de perturbation externes est considéré dans ce simulateur. Ce dernier donne la possibilité d’étudier le système de contrôle des masses d’épreuve et en particulier l’influence de chaque instrument impliqué, de leurs imperfections et de leur bruit, sur le bruit d’accélération observé.

La stratégie de contrôle des masses de référence réalisée par le *GRS* sera testée en milieu spatial par la mission *LPF*, incluant également des mesures interférométriques en vol et un système de micropropulsion équivalent. Une technologie très similaire sera utilisée et permettra d’évaluer les performances en terme de bruit d’accélération appliqué sur les masses d’épreuve. De manière plus générale, *LPF* donnera l’opportunité d’analyser, de comprendre, d’évaluer un système semblable en action dans l’environnement spatial et probablement de déduire un certain nombre d’améliorations nécessaires dans le but d’atteindre les exigences de performance pour la détection d’ondes gravitationnelles. Par ailleurs, l’outil de simulation discuté dans ce manuscrit pourra se nourrir des diverses conclusions tirées par *LPF* sur les caractéristiques de l’instrumentation embarquée et les différents bruits et forces de perturbation observés afin d’améliorer le réalisme et la précision du modèle développé.

### 3.3 Sensibilité du détecteur

La sensibilité du détecteur est caractérisée par la Densité Spectrale de Puissance (*DSP*), notée  $S_h(f)$ , du bruit de fond de la mesure, ou de manière similaire par sa racine carré, la Densité Spectrale en Amplitude (*DSA*), notée généralement  $\tilde{h}(f)$ . Le bruit est exprimé en déformation équivalente au passage d'une onde gravitationnelle  $\sqrt{S_h(f)} = \tilde{h}(f) = 2\frac{\delta L(f)}{L}$  (cf. 2.19), ce bruit imitant les effets de cette dernière. Dans le cas d'un interféromètre, il s'agit plutôt de la déformation relative entre les deux bras, mise à l'échelle pour représenter l'amplitude de déformation  $h$  que produit une onde gravitationnelle [34].

La fonction de sensibilité est donc l'inverse de la fonction de transfert du détecteur (en supposant la stationnarité du bruit) en cela qu'elle est construite pour retrouver l'amplitude de l'onde gravitationnelle qui serait responsable d'une déformation équivalente à celle observée par le détecteur soumis à son seul bruit, en l'absence de rayonnement gravitationnel. Elle permet donc de déterminer l'amplitude minimale  $h$  d'une onde gravitationnelle s'élevant au-dessus du bruit de fond et susceptible d'être distinguée par le détecteur. Elle peut s'écrire de la manière suivante [31], définie sur la bande de fréquence de 0,03mHz à 1Hz :

$$\tilde{h}(f) = \sqrt{5} \frac{2}{\sqrt{3}} T(f) \frac{\sqrt{S_{\delta x, IMS}(f) + S_{\delta x, DRS}(f)}}{L} \quad (3.1)$$

où l'on distingue deux types de source de bruit par l'introduction de la *DSP* du bruit de déplacement en provenance du système de mesure interférométrique  $S_{\delta x, IMS}(f)$  (IMS : Interferometric Measurement System) et de la *DSP* du bruit de déplacement tenant son origine du bruit d'accélération des masses d'épreuve  $S_{\delta x, DRS}(f)$  (DRS : Disturbances Reduction System). La fonction de sensibilité  $T(f)$  s'occupe de la conversion du bruit de déplacement observé sur un bras vers la déformation relative équivalente du détecteur. Elle inclut l'influence du temps de trajet lumineux entre les bras et le post-traitement des différents relevés interférométriques par `glstdi`. La variable  $L$  au dénominateur dénote la longueur de bras de l'interféromètre. La moyenne de la réponse du détecteur sur l'ensemble du ciel est considérée, ce qui introduit le facteur  $\sqrt{5}$  dans la sensibilité de déformation  $\tilde{h}(f)$ . Le facteur  $2/\sqrt{3}$  apparaît quant à lui du fait de l'angle de 60° décrit par les bras du détecteur, alors qu'une réponse optimale serait obtenue par un interféromètre à bras perpendiculaires. L'allure typique de cette fonction, construite à partir d'un modèle très simplifié de la réponse du détecteur [31], est représentée dans la figure 3.9 :

Dans la figure 3.8 sont explicitées les influences dominantes des bruits sur la sensibilité de déformation du détecteur. On distingue trois domaines de fréquence où la sensibilité est régie par un bruit spécifique. A basse fréquence, c'est le bruit d'accélération qui domine, dont le niveau considéré sur la courbe est de  $3 \cdot 10^{-15} \text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2}$ . Au-dessus de 5mHz, c'est le bruit de mesure interférométrique qui est de contribution majoritaire [41]. A haute fréquence ( $f > c/2L$ ), c'est l'influence de la longueur de bras de l'interféromètre qui dirige la remontée de la sensibilité. Lorsque la sépa-

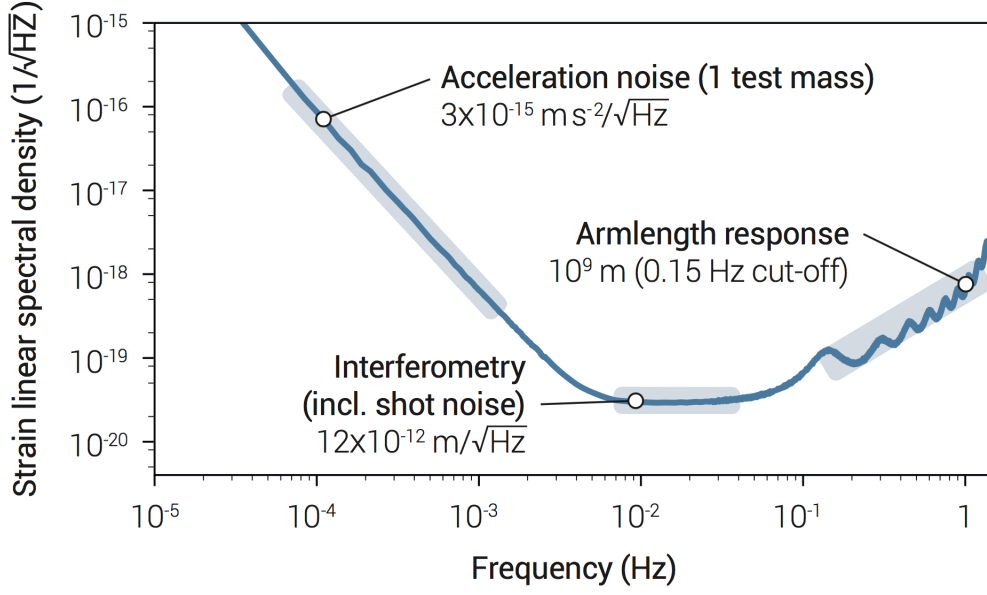


FIGURE 3.8 – Courbe de sensibilité de la mission *eLISA*, moyennée sur toute la durée de la mission, l'ensemble des positions dans le ciel et sur les différents états de polarisations possibles de l'onde incidente. Le bruit d'accélération, le bruit optique et la réponse de la longueur de bras du détecteur gouvernent la sensibilité respectivement dans la partie, basse, intermédiaire et haute de la bande de fréquence d'observation. Figure tirée de [40]

ration physique entre deux particules test est un multiple entier de la moitié de la longueur d'onde de la radiation qui la traverse ( $L = n\frac{\lambda}{2}$ ), cette dernière n'engendre aucune déformation observable. En effet, dans une telle situation, l'état de phase de l'onde gravitationnelle atteignant le détecteur à l'instant de l'émission d'un photon du lien laser est le même que lorsque ce dernier vient de terminer son aller-retour sur le bras du Michelson équivalent. La longueur de chemin optique du photon sera donc la même qu'en l'absence de l'onde gravitationnelle et cette dernière ne provoque pas dans ce cas de fluctuation de phase s'imprimant dans la mesure interférométrique. Pour les fréquences  $f > c/2L$ , on définit donc une longueur de bras effective pour laquelle la déformation observée est non nulle [31], et définie comme le reste de la soustraction entre la longueur de bras réelle  $L$  et le multiple entier  $n\frac{\lambda}{2}$  :

$$L_{eff} = L - n\frac{\lambda}{2} \quad (3.2)$$

Plus la fréquence de l'onde est grande et plus la longueur effective des bras se réduit, expliquant la détérioration de la réponse du détecteur à haute fréquence. De plus, lorsque la longueur de bras  $L$  est un exact multiple de la moitié de la longueur d'onde ( $L = n\frac{\lambda}{2}$ ), la réponse du bras s'éteint, et pour un détecteur isocèle, c'est la réponse globale du détecteur qui disparaît. Dans *eLISA*, les deux bras interférométriques sont nécessairement de longueur différente durant toute la mission, en particulier à cause de la respiration de la constellation, et cette perte de sensibilité se traduit par les oscillations à haute fréquence observées dans la figure 3.8.

En exprimant le bruit observé en terme d'amplitude de déformation équivalente  $\tilde{h}(f)$  par l'intermédiaire de la courbe de sensibilité, on est capable d'évaluer l'observabilité des sources astrophysiques candidates à la détection de l'interféromètre spatial. Dans la figure 3.9 on expose une version de la courbe de sensibilité [40], dite "sans unité", correspondante à la déformation observable à partir d'un seul cycle de la source périodique d'ondes gravitationnelles considérée, en l'occurrence des systèmes binaires de multiple nature. Cela revient à multiplier la courbe de sensibilité de la figure 3.8 par  $\sqrt{f}$ , en obtenant donc au final une amplitude de déformation équivalente  $\tilde{h}_n(f) = \tilde{h}(f)\sqrt{f}$  sans unité.

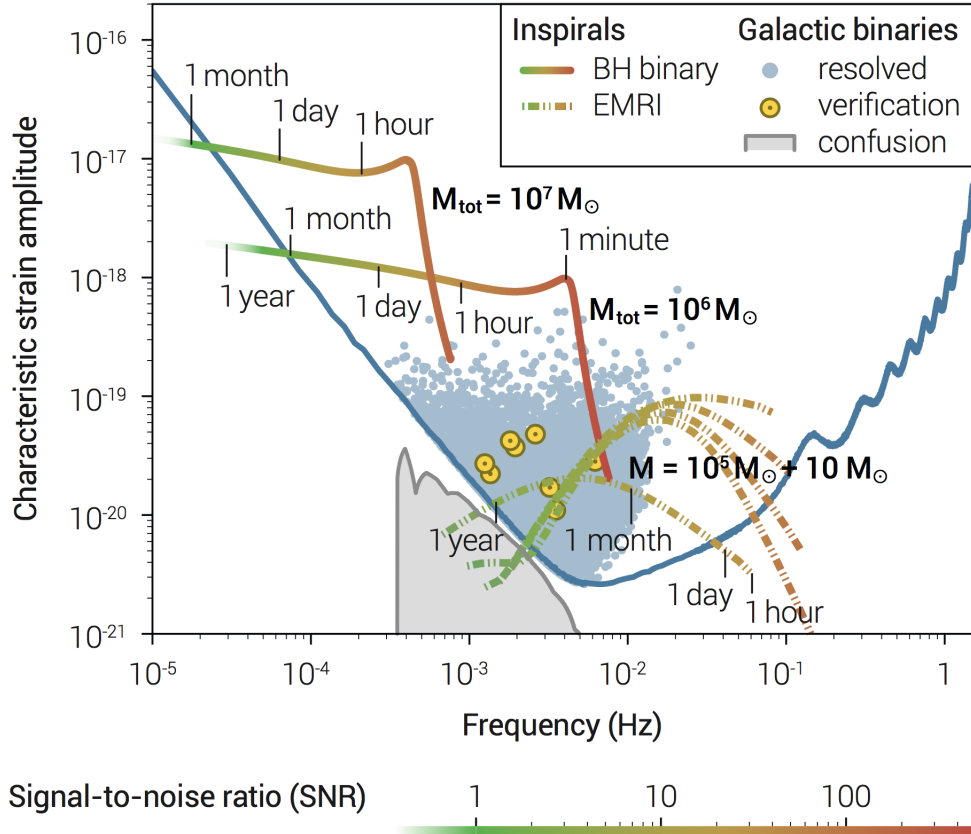


FIGURE 3.9 – Comparaison de la courbe de sensibilité avec le niveau de déformation caractéristique du détecteur induit par plusieurs catégories de sources astrophysiques typiques pour le détecteur spatial. Image tirée de [40]

Dans la figure 3.9 est superposée à la courbe de sensibilité une estimation de l'amplitude de déformation caractéristique observée par le détecteur pour plusieurs sources typiques [40] :

- Deux binaires de trous noirs supermassifs, chacune de rapport de masse unitaire et situées à un redshift de  $z = 3$  par rapport à l'observateur. Les masses des corps impliqués sont pour la première de  $10^7 M_\odot$  et pour la seconde de  $10^6 M_\odot$ . On observe que la fréquence des binaires, et donc de l'onde gravitationnelle observée, augmente avec le temps, car comme évoqué en section 2.4, le système binaire perd de l'énergie par radiation et se resserre progressivement. L'évolution temporelle de cette fréquence est indiquée par l'échelle de

temps au niveau des courbes, accompagnée de l'évolution du rapport signal sur bruit représenté par l'échelle de couleur.

- Un système binaire à grand rapport de masses ( $10^7 M_{\odot} + 10 M_{\odot}$ ) est représenté par l'intermédiaire des tracés discontinus. Ces tracés sont multiples car 5 fréquences harmoniques sont considérées sur la figure.
- Les binaires galactiques résolues sont représentées par des points. Ce sont les systèmes binaires galactiques dont la contribution sur le signal observé par le détecteur est identifiée et dont on peut déduire les caractéristiques (fréquence, masses, position dans le ciel...). Ces systèmes binaires apparaîtront stationnaires durant le temps d'observation caractéristique du détecteur spatial (autour de 3 ans), ce qui signifie que l'évolution de la fréquence de leur radiation sera imperceptible par le détecteur. Un petit nombre d'entre elles sont marquées d'un cercle jaune qui indique que ces systèmes binaires ont déjà été identifiés par les observations électromagnétiques et joueront ainsi le rôle de systèmes de vérification pour le détecteur spatial.
- Le fond de confusion galactique : c'est l'ensemble des binaires galactiques non résolues, au nombre considérable de plusieurs millions, dont les signaux se superposent dans la réponse du détecteur et créent un fond bruité entâchant sa sensibilité. Ce fond stochastique varie tout au long de l'année et c'est le niveau moyen qui est présenté dans la figure 3.9.

## Deuxième partie

### Modèle dynamique

Dans le chapitre précédent, on a mis en évidence l'influence du bruit d'accélération sur la sensibilité du détecteur spatial et le caractère central du module *GRS* dans le principe de détection. Un des objectifs principaux du simulateur développé et présenté ici est l'étude des performances du système en terme de bruit d'accélération. Il nécessite, en premier lieu, une modélisation de la dynamique du système. Dans cette partie, on met en place les équations de mouvement régissant la dynamique des masses d'épreuve dans leur compartiment et celle du satellite, essentiellement son attitude, dont le contrôle est par ailleurs particulièrement exigeant dans le cadre de la mission *eLISA* de part les nécessités d'alignement des télescopes des satellites distants.

Le discours de cette partie se veut progressif et détaillé dans l'expression des équations de mouvement. De manière générale, le présent manuscrit a, en outre, l'ambition de constituer une notice pour la compréhension et l'utilisation du simulateur développé lors de ce travail de thèse, dont le modèle dynamique en est l'un des coeurs. Malgré le cadre théorique classique que cette modélisation sollicite, la présence de nombreux systèmes de coordonnées, pour la plupart non-inertiels, et le caractère multidimensionnel du modèle dynamique (18 degrés de liberté dynamiques) augmentent rapidement la complexité du problème et nécessite finalement une attention particulière.

On commencera par discuter des trajectoires orbitales de la constellation des satellites, considérés dans un premier temps comme des objets ponctuels, ce qui permettra de définir une stratégie de pointage des satellites, où l'on se place par ailleurs dans une configuration de la mission *eLISA* particulière pour laquelle **les télescopes de chaque satellite restent fixes**. Après s'être arrêté un instant sur les outils de représentation de la dynamique des trois corps d'étude (satellite et masses d'épreuve), on établit les équations du mouvement en écriture vectorielle, que l'on exprime finalement dans un jeu de systèmes de coordonnées non-inertiels qui permettra une linéarisation très directe de la dynamique. Enfin, un modèle dynamique linéaire et stationnaire en représentation d'état, outil de représentation mathématique d'un système différentiel très largement utilisé dans le domaine de l'automatique, sera construit.

On note par ailleurs que ce travail de modélisation, en particulier la mise en place de la représentation d'état du système dynamique, s'inspire d'un outil de simulation<sup>1</sup> déjà existant pour LISA Pathfinder, dont les aspects dynamiques sont discutés dans le document [45].

---

1. Le simulateur est intégré à la boîte à outil Matlab, dénommée LISA Technology Package Data Analysis (*LTPDA*), développée par la communauté scientifique LISA Pathfinder.

# Chapitre 4

## Orbitographie

### 4.1 Orbites képlériennes et paramètres orbitaux

L'expérience *LISA* met en jeu une constellation de 3 satellites en formation triangulaire orbitant autour du Soleil. Le barycentre de ce triangle quasi-équilatéral suit approximativement l'orbite terrestre avec un délai angulaire de quelques dizaines de degrés.

La sélection des orbites se fait sous deux critères principaux. En premier lieu, la constellation doit évoluer à proximité de la Terre pour des questions opérationnelles évidentes. Ceci explique la position du barycentre situé à environ 1 u.a. du Soleil et suivant de quelques degrés la trajectoire orbitale terrestre. Ensuite, la distance inter-satellite doit se maintenir la plus constante possible tout au long de la mission. Cette propriété de stationnarité est essentielle à la mission pour atténuer les effets de plusieurs difficultés :

- Elle serait source d'un mouvement relatif induit entre les satellites émetteurs et récepteurs du lien laser. Par effet Doppler, ce mouvement impliquerait une modulation fréquentielle du signal.
- Elle éloignerait davantage le triangle de son caractère équilatéral, et provoquerait des complications de pointage, d'autant plus si les télescopes restent fixes par rapport aux corps des satellites.

Un tel jeu d'orbites permettant la stabilité de constellation et impliquant une distance inter-bras quasi-constante est donné dans [9]. Cette étude ne considère en première approximation que des orbites dites képlériennes, c'est-à-dire des orbites provenant de la résolution du problème gravitationnel à 2 corps avec symétrie sphérique du potentiel gravitationnel central. Ainsi, les influences des autres astres comme Jupiter, la Terre ou la Lune, et la non-sphéricité du Soleil ne sont ici pas considérées.

Afin de complètement définir une orbite, on doit contraindre 6 degrés de liberté,



par exemple, la position et la vitesse initiale de l'objet évoluant dans le champ gravitationnel. Cependant, en mécanique spatiale, on réalise généralement cette construction à l'aide d'un jeu de 6 paramètres, appelés paramètres orbitaux, et de deux plans, le plan orbital et un plan de référence qui sera ici le plan écliptique.

Deux paramètres définissent la géométrie de la trajectoire dans le plan orbital :

- Le demi-grand axe  $R$  de l'ellipse qui est la distance entre le centre de l'ellipse et le périastre. Il définit la taille caractéristique de l'orbite.
- L'excentricité  $e$  de l'ellipse est le rapport de la distance entre les deux foyers de l'ellipse et du demi-grand axe  $R$ .

Trois paramètres angulaires contraignent l'orientation du plan orbital par rapport au plan écliptique.

- L'inclinaison  $\epsilon$  représentant l'angle d'intersection entre le plan orbital et le plan écliptique.
- La longitude du noeud ascendant  $\Omega$  qui correspond à l'angle entre la direction du point vernal et la ligne des noeuds. Le point vernal est le point de rencontre sur la sphère céleste entre le plan écliptique et le plan équatorial terrestre, tandis que la ligne des noeuds est la droite d'intersection entre les plans orbital et écliptique.
- L'argument du périastre  $\varphi$  décrivant l'angle entre la ligne des noeuds et la direction du périastre. Ce dernier point de référence étant le lieu où l'objet sur l'orbite se trouve au plus près du corps central, situé quant à lui à l'un des foyers de l'ellipse.

Ils constituent les trois angles d'Euler de la séquence de rotation (Z-X-Z) tournant l'ellipse précédemment définie dans le plan écliptique pour l'orienter dans le plan orbital.<sup>1</sup>

Il reste à renseigner de la position à un instant donné de l'objet sur l'orbite :

- L'anomalie vraie  $M(t)$  est l'angle entre la direction du périastre et la position courante de l'objet sur son orbite. En choisissant une valeur à  $M(t = 0)$ , la position initiale de l'objet sur l'orbite sera renseignée.

---

1. La première rotation est décrite autour de l'axe perpendiculaire à l'écliptique. La direction du périastre de l'ellipse, initialement alignée suivant la direction du point vernal, fait alors un angle  $\Omega$  par rapport à cette dernière. Ensuite, l'ellipse est inclinée d'un angle  $\epsilon$  suivant la direction du paramètre de l'ellipse (corde parallèle à la directrice et passant par le foyer, ici celui où se situe le corps central). Cet axe devient alors la ligne des noeuds et l'ellipse se trouve maintenant dans le plan orbital. Enfin, l'ellipse subit une dernière rotation autour de la direction normale au plan orbital, écartant ainsi les directions précédemment confondues du périastre et de la ligne des noeuds d'un angle  $\omega$ .

## 4.2 Sélection des orbites képlériennes

Une procédure est proposée dans [9] pour obtenir un jeu d'orbites képlériennes permettant de maintenir la longueur des bras de la constellation triangulaire relativement stable durant toute la durée de la mission. La figure 4.1 illustre les arguments géométriques exposés.

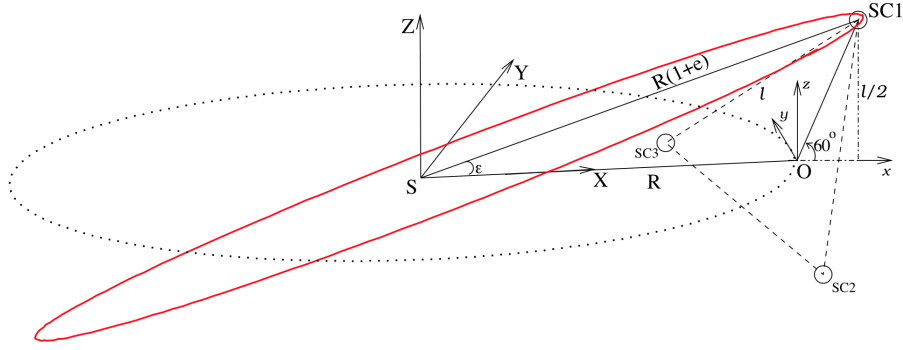


FIGURE 4.1 – Géométrie des orbites de la constellation de satellites. Sur la figure, le référentiel inertiel est représenté par la base  $(S\vec{X}\vec{Y}\vec{Z})$  et le référentiel CW par la base  $(O\vec{x}\vec{y}\vec{z})$ . Les trois satellites sont indiqués par les points SC1, SC2 et SC3, le Soleil est à l'origine S du référentiel inertiel et le barycentre O de la constellation coïncide avec l'origine du référentiel CW. Le plan dans lequel s'inscrit la formation triangulaire décrit un angle de  $60^\circ$  avec le plan écliptique. Schéma tiré de [9].

On utilise, pour référentiel inertiel, le référentiel  $(S\vec{X}\vec{Y}\vec{Z})$  considéré fixe dont l'origine S est le Soleil et dont l'axe  $\vec{Z}$  est normal à l'écliptique. L'axe  $\vec{X}$  est orienté selon la convention "J2000", c'est-à-dire dirigé vers le point vernal à l'époque J2000<sup>2</sup>. L'axe  $\vec{Y}$  complète la base de vecteurs. Ce référentiel sera appelé par la suite **référentiel J**.

On définit un corps de référence situé sur une orbite képlérienne circulaire de rayon  $1u.a.$  inscrit dans le plan écliptique. On construit un référentiel non-inertiel  $(O\vec{x}\vec{y}\vec{z})$ , appelé référentiel Clohessy-Wiltshire (CW), qui a pour origine O la position du corps de référence, décrivant une révolution de pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{1an}$ . La base de vecteurs unitaires associés à ce référentiel est composée de deux vecteurs situés dans le plan écliptique, l'un radial noté  $\vec{x}$  et l'autre tangentiel  $\vec{y}$ , et d'un vecteur normal à l'orbite  $\vec{z}$ . Ce référentiel n'est en fait rien d'autre que le référentiel orbital local de la particule de référence.

On considère alors un ensemble de corps poursuivant des trajectoires képlériennes particulières les maintenant en permanence au voisinage de O. En se plaçant dans le référentiel non-inertiel CW, on peut montrer que le sous-ensemble de ces corps appartenant à un plan faisant un angle de  $\pm\frac{\pi}{3}$  avec le plan écliptique ( $xOy$ ) décrit une rotation **rigide** de vitesse angulaire  $-\omega$ , maintenant ainsi une distance relative constante le long de leur orbite.

2. Le 1er Janvier 2000 à 11 h 58 min 55,816 s UTC

Il s'agit donc ici de construire une constellation en triangle équilatéral de côté  $L$  qui, dans le référentiel  $CW$ , est inscrit dans un plan interceptant l'écliptique avec un angle de  $\frac{\pi}{3}$ . Ce triangle décrira ainsi une rotation de vitesse angulaire  $\vec{\omega} = -\omega\vec{n}$  autour de son barycentre,  $\vec{n} = -\cos\frac{\pi}{3}\vec{x} + \sin\frac{\pi}{3}\vec{y}$  étant le vecteur normal au triangle. Dans le référentiel  $CW$ , cette rotation implique une relation de symétrie entre les trajectoires des satellites, le satellite  $i + 1$  prenant à l'instant  $t + \frac{2\pi}{3\omega}$  la position qu'occupait le satellite  $i$  à l'instant  $t$ . Ainsi, l'orbite du satellite 1 sera d'abord construite, les deux autres étant retrouvées par rotation de la première.

### 4.3 Construction géométrique des orbites

Le barycentre du triangle joue le rôle ici de notre particule de référence. Il décrit une orbite circulaire dans le plan écliptique de rayon  $1u.a.$  autour du Soleil. Cette propriété du barycentre contraint deux paramètres orbitaux :  $R = 1u.a.$  et  $\Omega = 0$ . Le satellite  $SC1$  est choisi comme étant à son apoastre à l'instant initial ( $M(t = 0) = 0$  et  $\varphi = 0$ ). A cet instant initial,  $SC1$  doit être le sommet du triangle de plus haute altitude (coordonnée  $Z$  sur la figure 4.1). Ainsi, afin d'obtenir un triangle de côté  $L$ , l'inclinaison  $\epsilon$  et l'excentricité  $e$  doivent respecter les égalités suivantes, où  $\alpha = \frac{L}{2R}$  :

$$\tan \epsilon = \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{3}}} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\alpha + \frac{4}{3}\alpha^2} \quad (4.1)$$

L'orbite de  $SC1$  est maintenant complètement définie. Celles des deux autres satellites sont construites par symétrie de rotation.  $SC2$  et  $SC3$  doivent se trouver au sommet du triangle de plus haute altitude respectivement aux temps  $t_0 + \frac{2\pi}{3\omega}$  et  $t_0 + \frac{4\pi}{3\omega}$ , instants où ils se trouvent à leur apoastre. On obtient donc l'orbite de  $SC2$  et  $SC3$  à partir de celle de  $SC1$  en fixant cette fois-ci  $\varphi_{i+1} = (i - 1)\frac{2\pi}{3}$  sans oublier de déphaser la position de  $SCi$  sur son orbite de  $\Delta t = -(i - 1)\frac{2\pi}{3\omega}$  par rapport à  $SC1$ .

### 4.4 Position des corps sur leur orbite

Le satellite est localisé sur son orbite à l'aide d'un angle appelé anomalie excentrique  $\psi(t)$ . On considère pour le moment un satellite intermédiaire  $SC0$  partageant les mêmes propriétés d'orbite que  $SC1$  à l'exception de l'inclinaison  $\epsilon$  fixée à 0. Cette orbite se trouve donc dans le plan écliptique. La position de  $SC0$  s'écrit dans la base de vecteurs associée au référentiel  $J$  :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\cos \psi(t) + e) \\ R\sqrt{1-e^2} \sin \psi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

En prenant le centre de l'ellipse  $C$  comme origine, l'anomalie excentrique  $\psi(t)$  correspond à l'angle entre la direction de l'apoastre et la direction de la position courante du satellite projetée perpendiculairement à la première direction sur un cercle auxiliaire de centre  $C$  et de rayon  $R$ . Cette quantité est soumise à la relation suivante, appelée équation de Kepler et directement dérivée de la loi des aires, où  $M(t)$  est l'anomalie vraie, angle entre la direction du périastre et la direction de la position courante :

$$\psi(t) + e \sin \psi(t) = M(t) = \omega t \quad (4.3)$$

La résolution de (4.3) nous donne ainsi par (4.2) les coordonnées du satellite intermédiaire SC0 dans le plan orbital. En orientant correctement ce plan orbital, à l'aide des paramètres angulaires  $(\epsilon, \varphi, \Omega = 0)$ , on retrouve les coordonnées du satellite  $Si$  dans le référentiel  $J$ . Il s'agit seulement d'appliquer un opérateur de rotation  $T_i(\epsilon, \varphi_i, 0)$  à la solution  $\vec{r}_0 = X_0\vec{X} + Y_0\vec{Y} + Z_0\vec{Z}$  :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(\epsilon, \varphi_i, 0) \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \vec{r}_i \quad (4.4)$$

en se rappelant d'appliquer le déphasage suivant :

$$\psi_i(t) \Rightarrow \psi_i(t - (i-1)\frac{2\pi}{3\omega}) \quad (4.5)$$

On obtient finalement :

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\cos \psi_i(t) + e) \cos \varphi_i \cos \epsilon - R\sqrt{1-e^2} \sin \psi_i(t) \sin \varphi_i \\ R(\cos \psi_i(t) + e) \sin \varphi_i \cos \epsilon + R\sqrt{1-e^2} \sin \psi_i(t) \cos \varphi_i \\ R(\cos \psi_i(t) + e) \sin \epsilon \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

# Chapitre 5

## Cinématique de la constellation

Dans la section précédente, nous avons considéré les satellites en tant que masse ponctuelle soumis au seul champ gravitationnel du Soleil. En réalité, chaque satellite représente un système de trois corps, le corps du satellite lui-même ainsi que les deux masses d'épreuve. Durant la simulation, on veut déterminer et mesurer à chaque instant la position relative de ces masses d'épreuve par rapport au corps du satellite. Bien qu'elle n'ait aucune influence sur la dynamique des masses d'épreuve, la position du satellite par rapport à un référentiel inertiel est, elle aussi, déterminée à chaque instant pour l'analyse a posteriori des résultats de simulation, et peut en outre constituer un intermédiaire de calcul pour l'estimation de l'accélération subie par les masses d'épreuve discutée au chapitre 9.<sup>1</sup>

### 5.1 Corps et référentiels

On se concentre pour l'instant sur le satellite 1, le propos étant directement généralisable aux autres satellites. Le système comprend trois corps considérés comme rigides. Pour complètement définir leur localisation par rapport à un référentiel donné, il faut déterminer 6 degrés de liberté par corps à chaque instant, à savoir 3 pour la position du centre de masse et 3 pour l'orientation de l'objet. A cet effet, chaque corps est équipé d'un référentiel dont l'origine est le centre de masse et la base de vecteurs est utilisée pour représenter son orientation. On construit ainsi les référentiels suivants, illustrés pour la plupart dans la figure 5.1 :

- Le référentiel  $(J, \vec{e}_{x,J}, \vec{e}_{y,J}, \vec{e}_{z,J})$  est le référentiel inertiel défini dans la section 4.2. C'est un référentiel galiléen dont l'origine  $J$  est situé au centre du Soleil.
- Le référentiel  $(B, \vec{e}_{x,B}, \vec{e}_{y,B}, \vec{e}_{z,B})$  est le référentiel attaché au satellite, généralement appelé référentiel barycentrique. Son origine est le centre de masse du

---

1. On préférera finalement une seconde méthode plus directe ne sollicitant pas cette position absolue, la première nécessitant éventuellement la comparaison de grandeurs numériques d'ordre très différent (cf. section 9.1.2).

satellite noté également B. Le vecteur  $\vec{e}_{z,B}$  est orthogonal au plan contenant les axes des deux télescopes,  $\vec{e}_{x,B}$  est dirigé suivant la bissectrice de l'angle décrit par les deux télescopes et  $\vec{e}_{y,B}$  complète la base.

- Un référentiel est associé à chacun des compartiments cubiques contenant les deux masses d'épreuve, la position et l'orientation de ces dernières étant mesurées en référence à ces logements. On construit donc deux référentiels  $(H1, \vec{e}_{x,H1}, \vec{e}_{y,H1}, \vec{e}_{z,H1})$  et  $(H2, \vec{e}_{x,H2}, \vec{e}_{y,H2}, \vec{e}_{z,H2})$ , tous deux fixes par rapport au satellite, dont l'origine est situé au centre des logements cubiques et dont les vecteurs sont normaux aux parois. Les positions de H1 et H2 sont repérées par les vecteurs  $B\vec{H}1 = \vec{r}_{H1/B}$  et  $B\vec{H}2 = \vec{r}_{H2/B}$ . Les axes  $\vec{e}_{z,H1}$  et  $\vec{e}_{z,H2}$  sont orientés parallèlement à  $\vec{e}_{z,B}$  tandis que les vecteurs  $\vec{e}_{x,H1}$  et  $\vec{e}_{x,H2}$  sont alignés suivant les axes de leur télescope respectif. Les axes  $\vec{e}_{y,H1}$  et  $\vec{e}_{y,H2}$  sont déduits des précédents. La géométrie du satellite donne [7] :

$$r_{H1/B}^B = (-0,3 \quad 0,3 \quad 0) \quad r_{H2/B}^B = (-0,3 \quad -0,3 \quad 0) \quad (5.1)$$

$$\vec{\alpha}_{H1/B} = (0 \quad 0 \quad -\frac{\pi}{6}) \quad \vec{\alpha}_{H2/B} = (0 \quad 0 \quad \frac{\pi}{6}) \quad (5.2)$$

où l'on exprime les vecteurs position dans la base du référentiel B et où  $\vec{\alpha}_{H1/B}$  et  $\vec{\alpha}_{H2/B}$  désignent les angles de Cardan donnant l'orientation des référentiels H1 et H2 par rapport au référentiel B (cf. section 5.2.2).

- Enfin, les référentiels  $(T1, \vec{e}_{x,T1}, \vec{e}_{y,T1}, \vec{e}_{z,T1})$  et  $(T2, \vec{e}_{x,T2}, \vec{e}_{y,T2}, \vec{e}_{z,T2})$  sont associés aux masses test. A nouveau, ils sont positionnés au niveau de leur centre de masse. Dans les conditions nominales, les référentiel T1 et T2 coïncident respectivement avec les référentiel H1 et H2 à la fois en terme de position et d'orientation.

Par la suite, on n'évoquera un référentiel que par la lettre associée à son origine.

## 5.2 Position et attitude : représentation et convention d'écriture

### 5.2.1 Représentation de la position

On représente la position d'un corps relativement à un autre en comparant la position relative de l'origine des référentiels. A titre d'exemple, la position du satellite par rapport au Soleil sera identifiée par la grandeur vectorielle  $\vec{r}_{B/J}$ , quantité pouvant être exprimée indifféremment dans une quelconque des bases définies en 5.1.

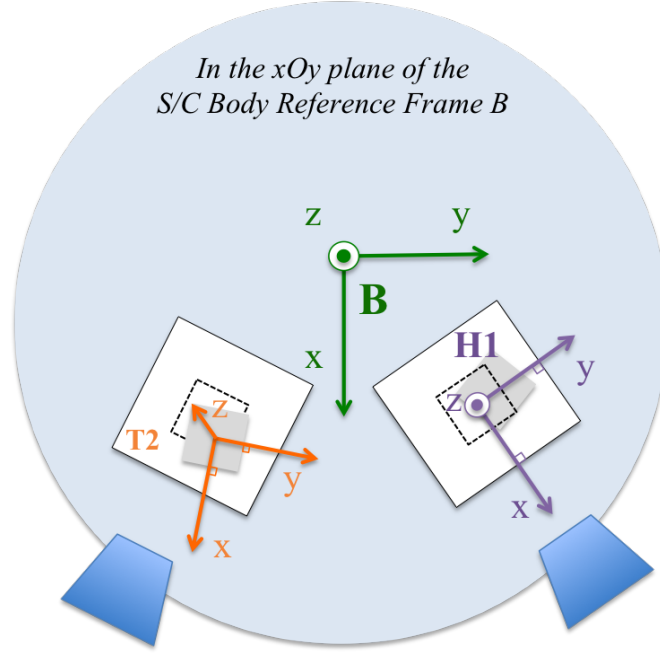


FIGURE 5.1 – Figure illustrant la disposition des référentiels  $B$ ,  $H1$ ,  $T2$  au sein d'un satellite. L'axe  $\vec{x}$  du référentiel  $B$  ( $\vec{e}_{x,B}$ ), est aligné sur la bissectrice de l'angle entre les télescopes qui est fixe et égal à  $60^\circ$ . Les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  du référentiel  $H1$  sont orthogonaux aux parois du compartiment, tandis que l'axe  $\vec{z}$  est normal à la figure. Les axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  du référentiel  $T2$ , nominalement confondus avec les axes du référentiel  $H2$ , sont orthogonaux aux faces de la masse d'épreuve.

## 5.2.2 Représentation de l'attitude

Quant à l'attitude des corps, l'orientation relative des axes des référentiels est utilisée. Par exemple, l'attitude du satellite relativement au référentiel  $J$  sera décrite à l'aide d'un ensemble  $\vec{\alpha}_{B/J}$  de trois angles  $(\theta_{B/J}, \eta_{B/J}, \varphi_{B/J})$ , appelés angles de Cardan, correspondant à la séquence des 3 rotations successives (Z-Y-X) conduisant les axes du référentiel  $J$  à se confondre avec ceux du référentiel  $B$ . Dans cet exemple, la séquence des trois rotations est la suivante :

Une première rotation d'un angle  $\varphi$  est décrite autour de l'axe  $\vec{e}_{z,J}$ . Cette première rotation transforme  $\vec{e}_{x,J}$  et  $\vec{e}_{y,J}$  en deux nouveaux vecteurs  $\vec{e}'_{x,J}$  et  $\vec{e}'_{y,J}$ , le vecteur  $\vec{e}_{z,J} = \vec{e}'_{z,J}$  restant inchangé. L'angle  $\varphi$  est choisi de sorte que  $\vec{e}'_{x,J}$  se trouve dans le plan  $(J, \vec{e}_{x,B}, \vec{e}_{z,J})$ . Ainsi, une seconde rotation d'angle  $\eta$ , cette fois-ci autour de  $\vec{e}'_{y,J}$ , est effectuée afin de superposer les axes  $\vec{e}''_{x,J}$  et  $\vec{e}_{x,B}$ . Enfin une rotation d'un angle  $\theta$  autour de ce dernier axe finit de confondre les axes des deux référentiels :  $(\vec{e}'''_{x,J}, \vec{e}'''_{y,J}, \vec{e}'''_{z,J}) = (\vec{e}_{x,B}, \vec{e}_{y,B}, \vec{e}_{z,B})$

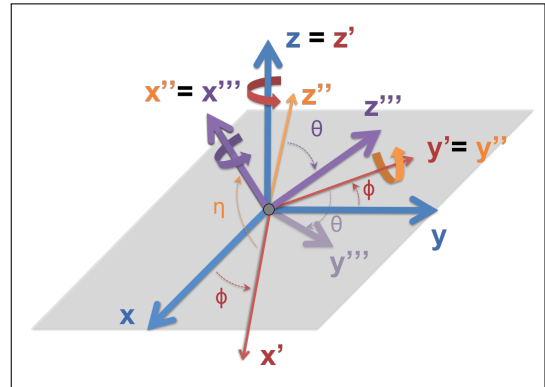


FIGURE 5.2 – Les angles de Cardan décrivent une séquence de trois rotations successives suivant  $\vec{e}_{z,J}$ ,  $\vec{e}'_{y,J}$ , et  $\vec{e}''_{x,J}$ .

Cette séquence de rotation transforme ainsi la base de vecteurs associée au référentiel  $J$  en la base associée à  $B$ . Elle donne l'expression d'un vecteur initialement exprimé par rapport à  $J$  dans la base du référentiel  $B$ . On opte donc ici pour une représentation dite "passive" des rotations. La matrice de passage correspondante se construit à partir des angles de Cardan de la manière suivante [10] :

$$T_J^B(\vec{\alpha}_{B/J}) = T_J^B(\theta, \eta, \varphi) = R_{X''}(\theta)R_{Y'}(\eta)R_Z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \eta \cos \varphi & \cos \eta \sin \varphi & -\sin \theta \\ \sin \theta \sin \eta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \eta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \eta \\ \cos \theta \sin \eta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \eta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \eta \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

A l'aide de la dérivée des angles de Cardan, on retrouve également la vitesse angulaire du satellite par rapport à  $J$ . En décomposant les rotations, on remarque que :

- La première rotation s'écrit  $\varphi \vec{e}_{z,J} = \varphi R_{Y'}^T(\eta)R_{X''}^T(\theta)\vec{e}_{z,B}$ .
- La seconde se trouve être  $\eta \vec{e}_{y,J}' = \eta R_{X''}^T(\theta)\vec{e}_{y,B}$ .
- La dernière est plus simplement  $\theta \vec{e}_{x,J} = \theta \vec{e}_{x,B}$ .

On a donc finalement [10] :

$$\vec{\omega}_{B/J} = \dot{\theta} \vec{e}_{x,B} + \dot{\eta} R_{X''}^T(\theta) \vec{e}_{y,B} + \dot{\varphi} R_{Y'}^T(\eta) R_{X''}^T(\theta) \vec{e}_{z,B} \quad (5.4)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \eta \\ 0 & \cos \theta & \cos \eta \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \eta \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

$$\vec{\omega}_{B/J} = B(\vec{\alpha}_{B/J}) \dot{\vec{\alpha}}_{B/J} \quad (5.6)$$

Cette dernière relation relie la dérivée des angles de Cardan décrivant l'orientation de  $B$  par rapport à  $J$  à la vitesse angulaire du satellite par rapport à  $J$ . Elle sera essentielle par la suite, pour pouvoir retrouver par intégration les angles de Cardan à partir de l'équation de la dynamique angulaire d'un corps.

### 5.2.3 Convention d'écriture

Dès lors, on réalise certainement que l'essentiel de la difficulté se réduit à la correcte utilisation de ces référentiels pour définir et exprimer les différentes quantités vectorielles et tensorielles impliquées dans la dynamique des corps. Par souci de cohérence, on décide de se munir d'une convention de notation concernant les grandeurs vectorielles ou tensorielles utilisées pour représenter les différentes relations entre référentiels.



- Chaque vecteur est représenté par une lettre décrivant sa nature physique :  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$  respectivement pour les positions, vitesses et accélérations et  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\omega}$  pour les angles de Cardan et les vitesses angulaires.
- Chaque vecteur est annoté d'une expression en indice, indiquant à la fois de quel corps et par rapport auquel il informe. Par exemple, la position du satellite par rapport à  $J$  s'écrit :  $\vec{r}_{B/J}$ .
- La dérivation temporelle d'un vecteur se fait toujours relativement à un système d'axes considérés comme fixes. Le référentiel relatif à la dérivation d'un vecteur sera désigné par un indice. La loi de Varignon de la composition du mouvement en mécanique classique nous donne la relation entre la dérivation temporelle suivant deux référentiels différents :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{B/J})_J = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{B/J})_B + \vec{\omega}_{B/J} \times \vec{r}_{B/J} \quad (5.7)$$

- Il peut également être essentiel d'indiquer la base dans laquelle le vecteur est exprimé. Pour cela, le référentiel d'expression sera indiqué en exposant :  $r_{B/J}^B$  signifie que la position du satellite par rapport à  $J$  est exprimée dans la base associée au référentiel B. La quantité  $r_{B/J}^B$  est maintenant un triplet de valeurs correspondant à :

$$r_{B/J}^B = \begin{pmatrix} \vec{r}_{B/J} \cdot \vec{e}_{x,B} \\ \vec{r}_{B/J} \cdot \vec{e}_{y,B} \\ \vec{r}_{B/J} \cdot \vec{e}_{z,B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{B/J}^B \\ y_{B/J}^B \\ z_{B/J}^B \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

- Le passage entre les expressions d'un même vecteur selon deux bases différentes se fait par application d'une matrice de rotation. Cette matrice de rotation est construite à partir des angles de Cardan donnant l'orientation d'un référentiel par rapport à l'autre (cf. 5.2.2). En considérant la matrice de passage  $T_J^B$  transformant l'expression dans le référentiel  $J$  de la position du satellite par rapport à  $J$  en l'expression de cette même quantité vectorielle dans la base du référentiel B, on a :

$$r_{B/J}^B = T_J^B(\vec{\alpha}_{B/J})r_{B/J}^J \quad (5.9)$$

- Au final, on exprimera toujours les relations vectorielles dans une base définie, écrivant chaque quantité vectorielle comme un triplet de valeur, afin de permettre leur implémentation dans la simulation. On prendra garde de bien exprimer toutes les quantités vectorielles ou tensorielles impliquées dans une même équation dans une base commune. De cette manière, la relation 5.7 s'écrit :

$$\dot{r}_{B/J}^J = T_B^J \dot{r}_{B/J}^B + \tilde{\omega}_{B/J}^J r_{B/J}^J \quad (5.10)$$

où l'on écrit le produit vectoriel comme un produit matriciel en introduisant la matrice antisymétrique :

$$\omega_{B/J}^J \times r_{B/J}^J = \tilde{\omega}_{B/J}^J r_{B/J}^J \quad (5.11)$$

$$\tilde{\omega}_{B/J}^J = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

## 5.3 Pointage des satellites

Le long de leur orbite, les satellites doivent en permanence échanger de l'information via les signaux lasers émis et reçus au niveau de leurs télescopes. Il faut ainsi assurer que chaque télescope pointe correctement vers le télescope respectif du satellite distant. La formation en triangle quasi-équilatéral suggère donc naturellement d'écarter chaque télescope d'un même satellite d'un angle de  $60^\circ$  et de maintenir leur banc optique dans le plan de la constellation. Bien que le document [31] fournisse une proposition de design détaillée pour la future mission *eLISA*, aucune configuration n'a pour l'instant été définitivement fixée. A titre d'exemple, la décision d'utiliser des télescopes mobiles, bien qu'étudiée dans [31], ne semble pas encore avoir été arrêtée. Pour cette dernière raison, et parce que cela permet d'étudier dans un premier temps une version simplifiée de la dynamique (la mobilité des télescopes introduit de nouvelles variables dynamiques), **on considèrera ici des télescopes fixes par rapport au satellite**. Cela donnera également l'opportunité d'étudier une telle configuration et en particulier les performances qu'elle permet d'obtenir en terme de bruit d'accélération.

### 5.3.1 Attitude idéale

Les orbites définies dans le chapitre 4 nous renseignent en première approximation de la position de chaque satellite par rapport à  $J$ . Connaissant à tout instant les positions des satellites distants par rapport à un satellite local, on va pouvoir estimer la vitesse angulaire nécessaire afin d'assurer le pointage des télescopes durant toute la mission.

La constellation triangulaire n'est malheureusement pas complètement équilatérale. Les côtés et les angles du triangle vont nécessairement fluctuer durant la mission. Cela signifie qu'une orientation des télescopes à  $60^\circ$  l'un de l'autre ne sera pas suffisante pour un parfait pointage de la constellation. C'est d'ailleurs le principal argument en faveur d'une mobilité des télescopes. Cependant, en raison de la divergence des faisceaux laser, le front d'onde en réception se trouve être grandement élargi, avec une largeur de faisceau de l'ordre du kilomètre. Cette dernière propriété, bien que réduisant considérablement la puissance reçue, facilite l'acquisition des faisceaux laser se propageant entre les satellites.

Ces trajectoires orbitales seront bien entendu perturbées par des forces exté-

rieures telles que la pression solaire ou les forces magnétiques, ou même par les forces commandées par la boucle de contrôle. Néanmoins, du point de vue d'un satellite, la différence de visée impliquée par ces perturbations sur le satellite distant est raisonnablement négligeable, en remarquant qu'en raison de la rétroaction, on parle de modifications modérées de la trajectoire orbitale initiale en comparaison avec la longueur du bras interférométrique.

### 5.3.2 Construction de l'attitude idéale en fonction des orbites

On se restreint donc ici à la première approximation où la constellation est parfaitement équilatérale. Pour assurer leur alignement, tous les télescopes doivent être dans le plan de la constellation et chaque satellite doit être correctement orienté dans ce plan. On se place localement au niveau d'un satellite en particulier et l'on essaie de trouver l'attitude par rapport à  $J$  du référentiel  $B$  associé à ce satellite de manière à ce que les axes des télescopes locaux et distants soient confondus.

#### Vitesse angulaire et orientation du référentiel véhicule

On se souvient (cf. sous-section 5.1) que le vecteur  $\vec{e}_{x,B}$  est dirigé suivant la bissectrice de l'angle entre les deux télescopes et que  $\vec{e}_{x,B}$  et  $\vec{e}_{y,B}$  sont tous les deux inscrits dans le plan contenant les axes des deux télescopes. On définit donc l'orientation des axes de  $B$  en fonction des orbites par les relations suivantes :

- Le vecteur  $\vec{e}_{x,B}$  doit être dirigé suivant une médiane du triangle.

$$\vec{BI} = \frac{1}{2}(\vec{r}_{B3/J} + \vec{r}_{B2/J}) - \vec{r}_{B1/J} \quad (5.13)$$

$$\vec{e}_{x,B} = \frac{\vec{BI}}{\|\vec{BI}\|} = \hat{BI} \quad (5.14)$$

où  $I$  est le point d'intersection entre la médiane et le côté opposé au satellite local (dans cet exemple le satellite 1)

- Le vecteur  $\vec{e}_{z,B}$  doit être normal au plan de la constellation. En posant  $\hat{r}_{23} = \frac{\vec{r}_{B3/J} - \vec{r}_{B2/J}}{\|\vec{r}_{B3/J} - \vec{r}_{B2/J}\|}$ , on obtient :

$$\vec{e}_{z,B} = \frac{\vec{e}_{x,B} \times \hat{r}_{23}}{\|\vec{e}_{x,B} \times \hat{r}_{23}\|} \quad (5.15)$$

- Le vecteur  $\vec{e}_{y,B}$  se déduit des deux autres.

$$\vec{e}_{y,B} = \vec{e}_{z,B} \times \vec{e}_{x,B} \quad (5.16)$$

On décide ensuite de retrouver la vitesse angulaire de  $B$  par rapport à  $J$  que cette orientation implique. En utilisant la relation :  $\frac{d}{dt}(\vec{e}_{x,B})_J = \vec{\omega}_{B/J} \times \vec{e}_{x,B}$ , on exprime la vitesse angulaire en fonction des axes de  $B$  :

$$\vec{\omega}_{B/J} = \vec{e}_{x,B} \times \frac{d}{dt}(\vec{e}_{x,B})_J + (\vec{\omega}_{B/J} \cdot \vec{e}_{x,B}) \vec{e}_{x,B} \quad (5.17)$$

qui peut se réduire en observant que  $\frac{d}{dt}(\vec{e}_{z,B}) \cdot \vec{e}_{y,B} = -\vec{\omega}_{B/J} \cdot \vec{e}_{x,B}$  :

$$\vec{\omega}_{B/J} = \vec{e}_{x,B} \times \frac{d}{dt}(\vec{e}_{x,B})_J - \left( \frac{d}{dt}(\vec{e}_{z,B})_J \cdot \vec{e}_{y,B} \right) \vec{e}_{x,B} \quad (5.18)$$

### Vitesse angulaire et orbites

On souhaite exprimer la vitesse angulaire en fonction seulement des positions et vitesses orbitales des satellites. Les vecteurs de la base  $B$  viennent d'être dérivés de ces dernières. Il ne reste plus qu'à expliciter les dérivées temporelles présentes dans l'équation 5.18. On remarque d'abord que :

$$\frac{d}{dt}(\vec{e}_{x,B})_J = \frac{1}{BI} \left( \frac{d}{dt}(\vec{BI})_J - \frac{d}{dt}(\vec{BI})_J \cdot \hat{BI} \right) \quad (5.19)$$

Ce qui conduit à l'expression :

$$\frac{d}{dt}(\vec{e}_{x,B})_J = \frac{\frac{1}{2}(\vec{v}_{B3/J} + \vec{v}_{B2/J}) - \vec{v}_{B1/J} - \left( \frac{1}{2}(\vec{v}_{B3/J} + \vec{v}_{B2/J}) - \vec{v}_{B1/J} \right) \cdot \vec{e}_{x,B}}{\left\| \frac{1}{2}(\vec{r}_{B3/J} + \vec{r}_{B2/J}) - \vec{r}_{B1/J} \right\|} \quad (5.20)$$

De manière similaire, on trouve :

$$\frac{d}{dt}(\vec{e}_{z,B})_J = \frac{\frac{d}{dt}(\vec{e}_{x,B})_J \times \hat{r}_{23} + \vec{e}_{x,B} \times \frac{d}{dt}(\hat{r}_{23})_J - (\vec{e}_{x,B} \times \hat{r}_{23}) \frac{d}{dt}(\|\vec{e}_{x,B} \times \hat{r}_{23}\|)_J}{\|\vec{e}_{x,B} \times \hat{r}_{23}\|^2} \quad (5.21)$$

expression pour laquelle on s'abstiendra ici d'un développement plus explicite. On constate néanmoins que toutes les quantités en jeu dépendent des positions et vitesses orbitales.

En remplaçant 5.21 et 5.20 dans 5.18, on se retrouve avec une expression de la vitesse angulaire dépendant explicitement des trajectoires orbitales de chaque satellite. Ce travail s'applique ici au satellite 1, mais il est bien sûr aisément généralisable du point de vue des deux autres satellites par permutation circulaire.

Cet effort est loin d'être accessoire, puisque qu'il permettra de déterminer analytiquement la vitesse angulaire de consigne à partir des positions, vitesses et accélérations déduites de la propagation des orbites. On évite ainsi toute dérivation numérique dont l'erreur pourrait se propager dans la simulation. On ouvre également la possibilité d'intégrer un propagateur d'orbites dans la simulation, la connaissance des trajectoires orbitales étant uniquement nécessaire pour en déduire le référentiel de consigne et les forces d'inertie.<sup>2</sup>

## 5.4 Dérive orbitale des masses d'épreuve

Dans le chapitre 4, on a construit les orbites d'une constellation de 3 masses ponctuelles autour du Soleil. En réalité pour chaque satellite, on doit distinguer les trajectoires orbitales du corps du satellite B, et des deux masses d'épreuve T1 et T2. On considérera dans la suite que les orbites déterminées au chapitre 4 correspondent à des trajectoires virtuelles purement géodésiques que suivraient les satellites en l'absence de toutes forces extérieures non-gravitationnelles.

Il peut être intéressant d'étudier également de telles trajectoires, dites "idéales", concernant les masses d'épreuve. On montre ainsi que les trajectoires des trois corps divergeront inexorablement, cela même en l'absence d'une quelconque perturbation extérieure, du seul fait que ces trois corps présentent inévitablement des conditions initiales différentes.

### 5.4.1 Orbites idéales des masses d'épreuve

Pour construire les orbites des masses d'épreuve impliquées par les trajectoires orbitales déterminées en 4, on fait la supposition qu'à l'instant initial, le système de trois corps est parfaitement rigide. Cela signifie que les corps partagent la même vitesse initiale, bien qu'ils occupent nécessairement des positions initiales différentes. Dès lors, on remarque que les orbites suivies par ces trois corps seront différentes, la position et la vitesse initiale d'un objet dans un champ gravitationnel définissant de manière univoque sa trajectoire orbitale.

A partir de l'équation 4.6 et par dérivation de l'expression on retrouve les positions et vitesses initiales des satellites. Pour le satellite 1, on a :

---

2. Cette méthode n'est pas encore en place à l'heure actuelle. Pour les résultats décrits dans ce manuscrit, les vitesses et accélérations angulaires sont déterminées à partir de la dérivation temporelle numérique des angles d'Euler, ces derniers étant déduits de la matrice de rotation  $T_J^O(t)$  [36] (cf. définition du référentiel de consigne  $O$  en section 6.3.2). La méthode analytique, plus rapide, plus souple et plus précise est en cours d'implémentation.

$$r_{B1/J}^J(t) = \begin{pmatrix} R(\cos \psi_i(t) + e) \cos \epsilon \\ R\sqrt{1-e^2} \sin \psi_i(t) \\ R(\cos \psi_i(t) + e) \sin \epsilon \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

$$v_{B1/J}^J(t) = \begin{pmatrix} -R\dot{\psi}_i(t) \sin \psi_i(t) \cos \epsilon \\ R\sqrt{1-e^2}\dot{\psi}_i(t) \cos \psi_i(t) \\ -R\dot{\psi}_i(t) \sin \psi_i(t) \sin \epsilon \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

expression à partir de laquelle on retrouve les conditions initiales du satellite 1 :

$$r_{B1/J}^J(0) = \begin{pmatrix} R(1+e) \cos \epsilon \\ 0 \\ R(1+e) \sin \epsilon \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$$v_{B1/J}^J(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega R \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

en remarquant que  $\dot{\psi}_i(0) = \frac{\omega}{1+e}$  où  $\omega = \frac{2\pi}{1an}$ . Conformément à la définition des orbites au chapitre 4, on vérifie qu'à l'instant initial le vecteur  $\vec{r}_{B1/J}$  est orthogonal à  $\vec{e}_{y,J}$  et que le vecteur vitesse est bien tangent à l'orbite :  $\vec{v}_{B1/J} \cdot \vec{r}_{B1/J} = 0$ .

A l'état initial, on suppose que les masses d'épreuve sont dans leur position nominale, c'est-à-dire centrées dans leur logement respectif et fixes par rapport au satellite. On en déduit donc :

$$r_{T1/J}^J(0) = r_{B/J}^J(0) + r_{H1/B}^J \quad r_{T2/J}^J(0) = r_{B/J}^J(0) + r_{H2/B}^J \quad (5.26)$$

$$v_{T1/J}^J(0) = v_{B/J}^J(0) \quad v_{T2/J}^J(0) = v_{B/J}^J(0) \quad (5.27)$$

en introduisant la position des logements par rapport au référentiel  $B$  défini à l'équation 5.2. Le décalage de la position initiale des masses inertielles  $r_{H1/B}^J$  et  $r_{H2/B}^J$  paraît infime comparé à la distance entre le satellite et le Soleil. Cependant, on verra qu'elle induit une distinction des orbites des trois corps pouvant aboutir à une évolution significative des distances relatives entre les corps.

A partir de ces conditions initiales, on peut retrouver les paramètres orbitaux correspondants. Les conditions initiales déterminent les 3 constantes du mouvement suivantes :

— Le moment cinétique perpendiculaire au plan orbital :

$$\vec{L} = \vec{r}_{T/J}(0) \times m_T \vec{v}_{T/J}(0) \quad (5.28)$$

— Le vecteur excentricité dirigé suivant le demi-grand axe de l'ellipse :

$$\vec{e} = \frac{\vec{v}_{T/J}(0) \times \vec{L}}{GM_s m_T} - \hat{r}_{T/J} \quad (5.29)$$

— L'énergie mécanique du système :

$$E_m = \frac{1}{2} m_T \|\vec{v}_{T/J}(0)\|^2 - \frac{GM_s m_T}{\|\vec{r}_{T/J}(0)\|} \quad (5.30)$$

Les deux premiers vecteurs constants définissent en particulier l'orientation de l'orbite par rapport à l'écliptique. On peut ainsi en déduire les trois paramètres angulaires que sont l'inclinaison, la longitude du noeud ascendant et l'argument du périastre (cf. section 4.1). La norme du vecteur  $\vec{e}$  donne également l'excentricité de l'orbite. La position initiale de l'objet sur l'orbite se retrouve à l'aide de la position absolue  $\vec{r}_{T/J}(0)$  et du vecteur excentricité. L'énergie mécanique, quant à elle, contraint la longueur du demi grand axe de l'ellipse.

La position absolue de la masse d'épreuve suivant sa trajectoire orbitale idéale est calculée sous MATLAB à partir des paramètres orbitaux. La différence de position initiale étant considérablement plus faible que la position absolue de la masse inertielle et du satellite, le calcul numérique est délicat mais néanmoins faisable, en effectuant dans un premier temps un traitement symbolique, puis en choisissant finalement la précision numérique nécessaire. On peut alors comparer les orbites idéales du satellite et de l'une des deux masses inertielles. La figure 5.3 représente l'évolution des positions relatives des trois corps exprimées dans le référentiel  $J$ .

D'après la figure 5.3, on constate une dérive de la masse inertielle de l'ordre du mètre sur un période d'un an. Ainsi, malgré le faible écart entre la masse d'épreuve et le centre de masse  $B$  du satellite à l'instant initial, du moins en comparaison avec la distance séparant le satellite du Soleil, on découvre une dérive annuelle significative de la masse inertielle franchissant les dimensions du logement auquel elle devrait se restreindre. Il est donc impossible d'envisager un mouvement purement géodésique pour la masse inertielle, ce même en l'absence totale de forces non-gravitationnelles. On voit alors qu'un contrôle des masses d'épreuve est d'ores et déjà nécessaire du seul fait que ces dernières doivent être contenues dans le satellite.

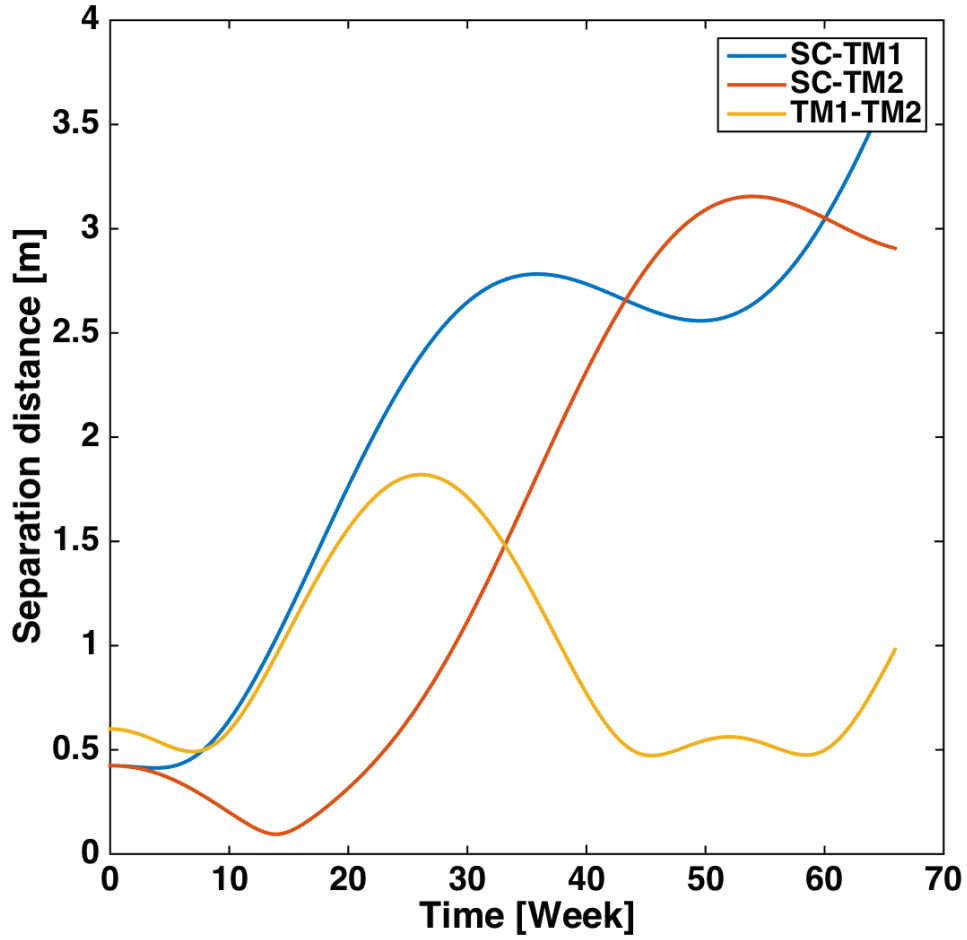


FIGURE 5.3 – Déviation géodésique observée entre les trois corps du système. Sur la figure est tracée l'évolution de la distance de séparation entre le satellite et les deux masses d'épreuve pour le satellite 1 de la figure 4.1 et pour des conditions initiales nominales (satellite correctement orienté dans le plan de la constellation pour garantir l'alignement des télescopes)



# Chapitre 6

## Dynamique de la constellation

L'objectif de ce chapitre est de mettre en place les équations du mouvement que respectent les trois objets concernés pour chaque satellite, à savoir le corps du satellite lui-même et les deux masses d'épreuve. Ces équations de mouvement seront dégagées uniquement pour un satellite, le problème étant généralisable directement aux deux autres. On rappelle que dans cette étude on se concentre sur une configuration de type *LISA* impliquant 3 satellites identiques. Ainsi, dans ce chapitre, on se gardera généralement d'indiquer le numéro du satellite considéré.

En particulier, en ce qui concerne la dynamique du satellite, les équations seront mises en place du point de vue de deux référentiels distincts. D'abord, ces équations seront établies dans le référentiel galiléen  $J$ , référentiel naturel d'expression de la dynamique puisque la première loi de Newton (principe d'inertie) s'y applique. Ensuite, à partir de ces équations, on écrira la dynamique du satellite dans un référentiel cette fois-ci non-inertiel appelé référentiel de consigne et préalablement défini. Du point de vue de ce référentiel de consigne, la dynamique, certes plus complexe à cause des différentes forces d'inertie apparentes, se verra facilement linéarisable.

### 6.1 Dynamique des corps rigides

Les trois corps étudiés sont considérés comme rigide. Cela signifie que l'on peut décomposer la dynamique de chacun d'eux en considérant séparément le mouvement de translation du centre des masses et le mouvement de rotation autour de ce dernier.

— Le mouvement linéaire est soumis à la seconde loi de Newton :

$$\frac{d}{dt}(\vec{p})_J = \sum \vec{f} \quad (6.1)$$

— Le mouvement angulaire respecte l'équation d'Euler [21] :

$$\frac{d}{dt}(\vec{h})_J = \sum \vec{\tau} \quad (6.2)$$

où  $\vec{h}$  représente le moment angulaire total du solide indéformable et  $\vec{t}$  le couple qui lui est appliqué.

### 6.1.1 Modèle du corps rigide

En réalité, l'équation 6.2 provient également de la seconde loi de Newton appliquée au cas particulier de la rotation des corps rigides. La rigidité du corps signifie physiquement que les différentes masses élémentaires  $dm$  dont est constitué le corps gardent une distance fixe les unes par rapport aux autres. Ainsi, étudier le mouvement de l'ensemble de ces masses  $dm$  revient à étudier le mouvement d'un seul point du corps, tel que le centre des masses, ainsi que l'unique mouvement des autres masses  $dm$  relativement à ce point permis par la rigidité de l'objet : le mouvement de rotation.

#### Moment angulaire et tenseur d'inertie

On peut montrer que le moment angulaire total du satellite autour de son centre des masses  $B$  est défini par :

$$\vec{h}_{Sat/B} = I_{Sat/B} \vec{\omega}_{B/J} \quad (6.3)$$

où  $I_{Sat/B}$  est le tenseur d'inertie du satellite au point  $B$ . Cette grandeur physique est une grandeur caractéristique de la répartition géométrique des masses du corps considéré. Au même titre que la masse inerte concernant les mouvements de translation, elle rend compte de la résistance d'un objet à sa mise en rotation autour d'un axe passant par un de ses points. En choisissant de calculer ce tenseur au centre des masses  $B$  du corps, il vient [21] :

$$I_{Sat/B} = \frac{m}{V} \int_{Sat} [(\vec{r}_{dm/B} \cdot \vec{r}_{dm/B}) \mathbb{1}_3 - \vec{r}_{dm/B} \otimes \vec{r}_{dm/B}] dV \quad (6.4)$$

où l'on émet l'hypothèse d'une densité volumique uniforme de l'objet  $\rho(\vec{r}_{dm/B}) = m/V$  et où l'on introduit le produit tensoriel de deux vecteurs tel que :

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

On remarque que l'équation 6.4 peut se réécrire de manière plus concise :

$$I_{Sat/B} = \frac{m}{V} \int_{Sat} [r_{dm/B}]^\times [r_{dm/B}]^{\times,T} dV \quad (6.6)$$

en utilisant la définition 5.12. On considérera exclusivement ce tenseur au barycentre du corps considéré, ici le satellite, que l'on notera donc simplement  $I_B$ .

Ce tenseur d'inertie est toujours constant par rapport au référentiel barycentrique  $B$ . C'est pourquoi il est particulièrement intéressant de décomposer l'équation 6.2 comme :

$$\frac{d}{dt}(\vec{h})_J = \frac{d}{dt}(\vec{h})_B + \vec{\omega}_{B/J} \times \vec{h} \quad (6.7)$$

$$\frac{d}{dt}(I_B \vec{\omega}_{B/J})_J = I_B \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{B/J})_B + \vec{\omega}_{B/J} \times (I_B \vec{\omega}_{B/J}) \quad (6.8)$$

En remarquant que  $\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{B/J})_B = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{B/J})_J$ , l'équation d'Euler 6.2 se réécrit :

$$I_B \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_{B/J})_J + \vec{\omega}_{B/J} \times (I_B \vec{\omega}_{B/J}) = \sum \vec{t} \quad (6.9)$$

La solution de cette équation différentielle, la vitesse angulaire  $\vec{\omega}_{B/J}$ , caractérise le mouvement de rotation du satellite.

### Axes principaux d'inertie et cas géométrique simple

Le tenseur d'inertie devient diagonal lorsqu'il est exprimé en référence à des axes particuliers : ce sont les axes principaux d'inertie. Ces axes sont de fait dirigés selon les vecteurs propres de la matrice associée au tenseur d'inertie. De manière générale, tout axe de symétrie matériel d'un corps ou tout axe perpendiculaire à un plan de symétrie est un axe principal d'inertie. Des corps possédant de telles symétries voient le calcul de leur tenseur d'inertie d'autant plus simplifié.

En particulier on peut montrer que pour un solide de forme cubique, le tenseur d'inertie exprimé dans le système des axes principaux d'inertie :

$$I = \frac{m}{6} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

où  $m$  est la masse du solide et  $a$  la longueur d'une de ses arêtes. Dans le cas du cube, les axes originaires du barycentre et perpendiculaires aux faces constituent un jeu d'axes principaux d'inertie. En se rappelant que les référentiels  $T$  associés aux masses d'épreuve possèdent un tel système d'axes (cf. section 5.1), on s'attend donc à ce que le tenseur d'inertie de ces dernières puisse s'écrire  $I_T^T = \frac{m_T a^2}{6} \mathbb{1}_3$ .

## 6.2 Les équations du mouvement

### 6.2.1 Equations du mouvement : les translations

Concernant le satellite, on souhaite connaître à chaque instant la position, dite "absolue", du satellite par rapport à  $J$ . La seconde loi de Newton nous donne simplement :

$$\boxed{m_B \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{B/J})_J = \sum \vec{f}_B} \quad (6.11)$$

En revanche, on décide de repérer les masses d'épreuve par rapport aux référentiels  $H$ , puisque dans le satellite, la position des masses est mesurée en référence aux logements. Etant donné que ces référentiels sont non-inertiels, on a :

$$\begin{aligned} m_T \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{T/J})_J &= \sum \vec{f}_T \\ m_T \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{B/J} + \vec{r}_{T/B})_J &= \sum \vec{f}_T \\ m_T \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} (\vec{r}_{B/J})_J + \frac{d}{dt} (\vec{r}_{T/B})_J \right)_J &= \sum \vec{f}_T \\ m_T \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} (\vec{r}_{B/J})_J + \frac{d}{dt} (\vec{r}_{T/B})_B + \vec{\omega}_{B/J} \times \vec{r}_{T/B} \right)_J &= \sum \vec{f}_T \end{aligned} \quad (6.12)$$

En décomposant  $\vec{r}_{T/B} = \vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B}$  et en se souvenant que les axes des référentiels  $B$  et  $H$  s'orientent identiquement (cf section 5.1) :

$$\begin{aligned} m_T \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{T/H})_H + m_T \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{B/J})_J + m_T \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{B/J})_J \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B}) \\ + m_T \vec{\omega}_{B/J} \times (\vec{\omega}_{B/J} \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B})) + 2m_T \vec{\omega}_{B/J} \times \frac{d}{dt} (\vec{r}_{T/H})_H &= \sum \vec{f}_T \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dans cette dernière équation, les termes du membre gauche représentent respectivement l'accélération relative (terme 1), l'accélération d'entraînement (termes 2, 3 et 4), et l'accélération de Coriolis (terme 5).

En remarquant que le terme 2 est lié à la force exercée sur le satellite par l'équation 6.11, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}
& m_T \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{T/H})_H + m_T \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{B/J})_J \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B}) \\
& + m_T \vec{\omega}_{B/J} \times (\vec{\omega}_{B/J} \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B})) + 2m_T \vec{\omega}_{B/J} \times \frac{d}{dt} (\vec{r}_{T/H})_H \\
& = \sum \vec{f}_T - \frac{m_T}{m_B} \sum \vec{f}_B
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Ainsi, pour étudier la dynamique des masses d'épreuve, il n'est pas essentiel de connaître la position du satellite par rapport à  $J$  et on pourrait sans problème omettre d'inclure l'équation 6.11 dans cette modélisation. Néanmoins, on décide de maintenir cette information dans notre étude, qui pourrait se révéler utile, sinon dans la simulation en elle-même, du moins dans son analyse a posteriori.

## 6.2.2 Equations du mouvement : les rotations

Dans la section 6.1.1 nous avons déjà dégagé l'équation à laquelle la vitesse angulaire du satellite est soumise :

$$I_B \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{B/J})_J + \vec{\omega}_{B/J} \times (I_B \vec{\omega}_{B/J}) = \sum \vec{t}_B \tag{6.15}$$

Pour les masses d'épreuve, les complications induites par le caractère non-inertiel des référentiels  $H$  se rencontrent une nouvelle fois.

$$\begin{aligned}
& I_T \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{T/J})_J + \vec{\omega}_{T/J} \times (I_T \vec{\omega}_{T/J}) = \sum \vec{t}_T \\
& I_T \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{T/H} + \vec{\omega}_{B/J})_J + (\vec{\omega}_{T/H} + \vec{\omega}_{B/J}) \times [I_T (\vec{\omega}_{T/H} + \vec{\omega}_{B/J})] = \sum \vec{t}_T
\end{aligned} \tag{6.16}$$

On obtient ainsi après développement l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
& I_T \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{T/H})_H + I_T (\vec{\omega}_{B/J} \times \vec{\omega}_{T/H}) + I_T \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{B/J})_J \\
& + (\vec{\omega}_{T/H} + \vec{\omega}_{B/J}) \times [I_T (\vec{\omega}_{T/H} + \vec{\omega}_{B/J})] = \sum \vec{t}_T
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Cette équation explicite la vitesse angulaire  $\vec{\omega}_{T/H}$  des masses d'épreuve par rapport aux logements. On voit aussi une dépendance de l'expression en la vitesse angulaire "absolue" du satellite  $\vec{\omega}_{B/J}$  qui ne pourra être évitée ici, introduisant des termes non-linéaires quadratiques dans la dynamique.

### 6.2.3 Valeurs des masses et des tenseurs d'inertie

Pour finir d'établir les équations du mouvement, il reste à déterminer les valeurs des masses inertes et des tenseurs d'inertie pour les 3 corps considérés. Le document [7] fournit une estimation de l'industriel *Airbus Defence & Space* de ces dernières quantités physiques, chacune d'elles étant accompagnées d'une marge d'erreur.

On y trouve les prévisions suivantes :

$$m_B = 350kg \quad (6.18)$$

$$m_T = 1.96kg \quad (6.19)$$

$$I_B^B = \begin{pmatrix} 158,0997 & -8,6262 & 0,8819 \\ -8,6262 & 163,0932 & 0,1913 \\ 0,8819 & 0,1913 & 297,0684 \end{pmatrix} kg.m^2 \quad (6.20)$$

$$I_T^T = \begin{pmatrix} 6,913.10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 6,913.10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 6,913.10^{-4} \end{pmatrix} kg.m^2 \quad (6.21)$$

les tenseurs d'inertie étant exprimés dans leur référentiel barycentrique respectif. Les masses d'épreuve sont naturellement de forme cubique, ce qui explique l'égalité des termes diagonaux du tenseur d'inertie, comme on l'avait anticipé dès la section 6.1.1.

### 6.2.4 Repère d'expression des équations du mouvement

Les équations différentielles n'impliquent jusqu'à présent que des quantités vectorielles. Pour permettre leur implémentation sous MATLAB, il est temps maintenant de les exprimer dans un ensemble de bases permettant leur traitement numérique.

La position du satellite est pour l'instant exprimé dans le repère du référentiel  $J$ . Concernant l'attitude, il est préférable de l'exprimer dans le repère associé au satellite, d'une part parce que le tenseur d'inertie s'y retrouve constant, et d'autre part car les couples commandés par le satellite s'exprimeront naturellement dans ce référentiel.

$$m_B \ddot{r}_{B/J}^J = \sum f_B^J \quad (6.22)$$

$$I_B \dot{\omega}_{B/J}^B + [\omega_{B/J}^B]^\times I_B \omega_{B/J}^B = \sum t_B^B \quad (6.23)$$

Pour les masses d'épreuve, le raisonnement est similaire. La position des masses est mesurée et contrôlée par rapport aux référentiels  $H$ . En particulier, on rappelle

que le système d'électrodes pour la mesure et l'actuation est fixé sur chacune des parois des logements.

$$\begin{aligned}
m_T \ddot{r}_{T/H}^H + m_T [T_B^H \omega_{B/J}^B]^\times (r_{T/H}^H + r_{H/B}^H) \\
+ m_T [T_B^H \omega_{B/J}^B]^\times [T_B^H \omega_{B/J}^B]^\times (r_{T/H}^H + r_{H/B}^H) + 2m_T [T_B^H \omega_{B/J}^B]^\times \dot{r}_{T/H}^H \\
= \sum f_T^H - \frac{m_T}{m_B} \sum f_B^H \quad (6.24)
\end{aligned}$$

Pour l'attitude, il est encore une fois nécessaire d'exprimer les équations dans le repère barycentrique  $T$  du corps tournant. Dans la section 6.1.1, on a évoqué que le tenseur d'inertie  $I_T$  est un multiple de la matrice identité lorsqu'il est exprimé dans le référentiel  $T$ . Dans l'équation 6.17, le dernier terme du membre de gauche s'annule dans ce cas :

$$\begin{aligned}
(\omega_{T/H}^T + \omega_{B/J}^T) \times [I_T^T (\omega_{T/H}^T + \omega_{B/J}^T)] \\
= I_T^T (\omega_{T/H}^T + \omega_{B/J}^T) \times (\omega_{T/H}^T + \omega_{B/J}^T) = 0 \quad (6.25)
\end{aligned}$$

Finalement, l'équation 6.17 se réécrit comme :

$$I_T^T \dot{\omega}_{T/H}^T + I_T^T T_B^T \dot{\omega}_{B/J}^B + I_T^T [\omega_{B/J}^T]^\times \omega_{T/H}^T = \sum t_T^T \quad (6.26)$$

## 6.3 Le référentiel de consigne O

Les équations du mouvement tout juste établies contiennent plusieurs termes non-linéaires, impliquant le produit de deux fonctions dépendantes des variables dynamiques, dont l'une d'entre elles est généralement liée à l'attitude du satellite, conséquence de l'apparition des forces d'inertie. Or, on verra par la suite qu'il est extrêmement intéressant d'obtenir des équations différentielles du mouvement linéaires lorsqu'il s'agit de représenter la dynamique grâce à un modèle en représentation d'état. Traiter ces équations revient alors à manipuler un ensemble de matrices, donnant alors l'accès à tout l'arsenal de l'analyse matricielle.

### 6.3.1 Boucle de rétroaction et état d'équilibre

Dans notre système, chaque variable dynamique est mesurée et contrôlée de sorte qu'elle soit la plus proche possible d'un point de fonctionnement. Schématiquement, un signal d'erreur, construit comme la différence entre la mesure de la variable dynamique et la valeur de consigne, est procuré au contrôleur qui en déduit une

force à injecter pour stabiliser le système. La section 8.5 est dédiée à ces aspects de contrôle et l'on donnera alors de plus amples détails à ce propos.

Ainsi, pour linéariser la dynamique, on peut utiliser la propriété de stabilité qu'engendre cette boucle de rétroaction. En particulier on peut en déduire que :

- Le contrôle du pointage des satellites assure que la vitesse angulaire  $\vec{\omega}_{B/J}$  reste constamment proche de la consigne décrite en section 5.3.
- A l'état nominal la position et l'attitude des masses d'épreuve sont identiques à celles du référentiel  $H$ . Il vient alors les valeurs de consigne suivantes :  $r_{T/H}^H = (0, 0, 0)$ ,  $\vec{\alpha}_{T/H} = \vec{0}$  et  $\omega_{T/H}^T = (0, 0, 0)$ .

Ces valeurs de consigne constituent dans l'idéal un point d'équilibre stable pour le modèle dynamique en boucle fermée. Mathématiquement, la linéarisation autour de cette consigne se justifie donc naturellement.

### 6.3.2 Référentiel de consigne

Il peut alors être judicieux d'établir des équations du mouvement particulières dans lesquelles seront mises en jeu des variables dynamiques relatives à un référentiel dit de consigne. Dans ce référentiel, ces variables seront nulles à l'état d'équilibre stable du système en boucle fermée. La linéarisation du problème sera alors très directe.

De suite, on constate que la dynamique des masses d'épreuve est déjà exprimée dans un tel référentiel. La boucle de rétroaction agit de sorte que les référentiels  $T$ , témoins de la position et de l'orientation des masses, correspondent avec les référentiels  $H$  associés aux logements. Ce n'est pas le cas pour le satellite, pour lequel la position et l'attitude font référence au référentiel inertiel  $J$ . Durant la mission, il n'est bien sûr pas question que le satellite garde une attitude constante suivant le référentiel  $J$ , essentiellement en raison des nécessités de pointage des télescopes.

On décide donc de définir un repère associé au satellite, tenant compte de l'attitude de consigne définie en 5.3.2. Plus précisément, ce référentiel de consigne, que l'on notera  $(O, \vec{e}_{x,O}, \vec{e}_{y,O}, \vec{e}_{z,O})$  ou que l'on nommera de manière plus concise le référentiel  $O$ , sera défini comme suit :

- L'origine de ce référentiel suivra la trajectoire orbitale idéale du satellite définie à l'équation 4.6. Physiquement, cela signifie que la trajectoire de l'origine  $O$  est la même que celle que le centre des masses du satellite suivrait dans le cas d'une absence totale de forces perturbatrices extérieures (mouvement purement géodésique).
- La direction des axes de ce référentiel par rapport à  $J$  est donné dans la section 5.3.2. L'orientation de ce référentiel correspond donc à l'orientation idéale du référentiel  $B$  associé au satellite nécessaire au bon pointage des



télescopes (ce critère étant également défini dans la section 5.3.2).

En référence aux sections 4.4 et 5.3.2, on définit le référentiel  $(O_1, \vec{e}_{x,O_1}, \vec{e}_{y,O_1}, \vec{e}_{z,O_1})$  par :

$$r_{O_i/J}^J = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

$$\vec{e}_{x,O_1} = \frac{O_1 \vec{I}_1}{\|O_1 \vec{I}_1\|} = O_1 \hat{I}_1 \quad (6.28)$$

$$\vec{e}_{z,O_1} = \frac{O_1 \vec{I}_1 \times (\vec{r}_{O_3/J} - \vec{r}_{O_2/J})}{\|O_1 \vec{I}_1 \times (\vec{r}_{O_3/J} - \vec{r}_{O_2/J})\|} \quad (6.29)$$

$$\vec{e}_{y,O_1} = \vec{e}_{z,O_1} \times \vec{e}_{x,O_1} \quad (6.30)$$

On explicite seulement la cas du satellite 1, les autres se retrouvant par permutation circulaire. De nouveau, on fait allusion à la médiane  $O_1 \vec{I}_1$  du triangle formé par la constellation tel que :

$$O_1 \vec{I}_1 = \frac{1}{2}(\vec{r}_{O_3/J} + \vec{r}_{O_2/J}) - \vec{r}_{O_1/J} \quad (6.31)$$

Dans les équations de mouvement, on considérera donc des variable dynamiques relatives à ce référentiel. Ainsi, on s'attend à ce que la boucle de rétroaction tende à annuler la variable dynamique d'attitude du satellite, étant donné que le contrôle d'attitude du satellite est entièrement au service du pointage des télescopes.

$$\vec{\omega}_{B/J} = \vec{\omega}_{B/O} + \vec{\omega}_{O/J} \quad (6.32)$$

Concernant la position absolue du satellite, on a juste décomposé le mouvement de translation du satellite en un mouvement relatif à  $O$  et un mouvement de  $O$  relatif à  $J$  :

$$\vec{r}_{B/J} = \vec{r}_{B/O} + \vec{r}_{O/J} \quad (6.33)$$

Cette décomposition peut être commode car elle distingue la trajectoire orbitale de ses perturbations. On note tout de même que la stratégie de contrôle ne concerne en aucun cas la position absolue du satellite, les degrés de liberté de celui-ci étant complètement asservis sur son mouvement relatif aux masses d'épreuve (Drag-Free) et le contrôle d'attitude (cf section 8.5). L'argument prenant valeur pour l'attitude ne s'applique donc pas dans le cas des translations : le référentiel  $O$  ne constitue pas un point d'équilibre pour les translations et la linéarisation autour de  $O$  n'est pas entièrement justifiée dans ce cas. Malgré tout, ce n'est pas essentiel ici. La position

absolue du satellite n'intervient à aucun moment dans la dynamique des masses d'épreuve comme constaté en section 6.2.1.

## 6.4 Les équations du mouvement : expression dans le référentiel O

### 6.4.1 Les translations

En décomposant la position "absolue" du satellite comme indiqué dans l'équation 6.33 on obtient pour le satellite :

$$\begin{aligned}
 m_B \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{B/O})_O + m_B \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{O/J})_J \times (\vec{r}_{B/O})_O \\
 + m_B \vec{\omega}_{O/J} \times (\vec{\omega}_{O/J} \times \vec{r}_{B/O}) + 2m_B \vec{\omega}_{O/J} \times \frac{d}{dt} (\vec{r}_{B/O})_O \\
 = \sum \vec{f}_B - m_B \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{O/J})_J = \sum \vec{f}_B - \vec{f}_{grav,O} \quad (6.34)
 \end{aligned}$$

Dans cette dernière équation, on a explicitement interprété le terme  $m_B \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{O/J})_J$  comme équivalent à la force gravitationnelle appliquée sur le satellite le long de son orbite, aux perturbations extérieures près. Ainsi, l'introduction du référentiel O permet une décomposition explicite des forces extérieures, en distinguant les forces purement gravitationnelles, impliquées dans le mouvement purement géodésique, des autres perturbations extérieures. En exprimant l'équation vectorielle 6.34 dans le repère du référentiel O :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 m_B \ddot{r}_{B/O}^O + m_B \left( [\dot{\omega}_{O/J}^O]^\times + [\omega_{O/J}^O]^\times [\omega_{O/J}^O]^\times \right) r_{B/O}^O \\
 + 2m_B [\omega_{O/J}^O]^\times \dot{r}_{B/O}^O = \sum f_B^O - m_B T_J^O \ddot{r}_{O/J}^J = \sum f_B^O - T_J^O f_{grav,O}^J
 \end{aligned}
 } \quad (6.35)$$

Pour la dynamique de translation des masses d'épreuve, on décompose simplement la vitesse angulaire du satellite dans l'équation 6.14 d'après l'équation 6.32, pour introduire la vitesse angulaire du satellite par rapport au référentiel O :

$$\begin{aligned}
& m_T \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{T/H})_H \\
& + m_T \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{B/O})_O \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B}) + m_T (\vec{\omega}_{O/J} \times \vec{\omega}_{B/O}) \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B}) \\
& + m_T \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{O/J})_J \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B}) \\
& + m_T \vec{\omega}_{B/O} \times (\vec{\omega}_{B/O} \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B})) \\
& + m_T \vec{\omega}_{B/O} \times (\vec{\omega}_{O/J} \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B})) \\
& + m_T \vec{\omega}_{O/J} \times (\vec{\omega}_{B/O} \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B})) \\
& + m_T \vec{\omega}_{O/J} \times (\vec{\omega}_{O/J} \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B})) \\
& + 2m_T \vec{\omega}_{B/O} \times \frac{d}{dt} (\vec{r}_{T/H})_H \\
& + 2m_T \vec{\omega}_{O/J} \times \frac{d}{dt} (\vec{r}_{T/H})_H \\
& = \sum \vec{f}_T - \frac{m_T}{m_B} \sum \vec{f}_B
\end{aligned} \tag{6.36}$$

En utilisant l'identité de Jacobi, on remarque que :

$$\begin{aligned}
& m_T \vec{\omega}_{O/J} \times (\vec{\omega}_{B/O} \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B})) \\
& = m_T \vec{\omega}_{B/O} \times (\vec{\omega}_{O/J} \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B})) \\
& \quad + m_T (\vec{\omega}_{O/J} \times \vec{\omega}_{B/O}) \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B})
\end{aligned} \tag{6.37}$$

L'équation 6.36 se simplifie donc :

$$\begin{aligned}
& m_T \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{T/H})_H \\
& + m_T \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{B/O})_O \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B}) \\
& + m_T \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{O/J})_J \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B}) \\
& + m_T \vec{\omega}_{B/O} \times (\vec{\omega}_{B/O} \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B})) \\
& + 2m_T \vec{\omega}_{O/J} \times (\vec{\omega}_{B/O} \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B})) \\
& + m_T \vec{\omega}_{O/J} \times (\vec{\omega}_{O/J} \times (\vec{r}_{T/H} + \vec{r}_{H/B})) \\
& + 2m_T \vec{\omega}_{B/O} \times \frac{d}{dt} (\vec{r}_{T/H})_H \\
& + 2m_T \vec{\omega}_{O/J} \times \frac{d}{dt} (\vec{r}_{T/H})_H \\
& = \sum \vec{f}_T - \frac{m_T}{m_B} \sum \vec{f}_B
\end{aligned} \tag{6.38}$$

En exprimant cette relation vectorielle dans la base du référentiel  $H$  :

$$\begin{aligned}
& m_T \ddot{r}_{T/H}^H - m_T [r_{T/H}^H + r_{H/B}^H]^\times T_B^H \dot{\omega}_{B/O}^B - m_T \left( [T_B^H \omega_{B/O}^B]^\times [r_{T/H}^H + r_{H/B}^H]^\times \right. \\
& \quad \left. + 2 [T_B^H T_O^B \omega_{O/J}^O]^\times [r_{T/H}^H + r_{H/B}^H]^\times \right) T_B^H \omega_{B/O}^B + 2m_T [T_B^H \omega_{B/O}^B]^\times \dot{r}_{T/H}^H \\
& \quad = \sum f_T^H - \frac{m_T}{m_B} \sum f_B^H \\
& \quad - m_T \left( [T_B^H T_O^B \dot{\omega}_{O/J}^O]^\times + [T_B^H T_O^B \omega_{O/J}^O]^\times [T_B^H T_O^B \omega_{O/J}^O]^\times \right) (r_{T/H}^H + r_{H/B}^H) \\
& \quad \quad - 2m_T [T_B^H T_O^B \omega_{O/J}^O]^\times \dot{r}_{T/H}^H \quad (6.39)
\end{aligned}$$

Dans cette dernière équation, on a réarrangé les différents termes en prévision de la linéarisation. Les termes ont été distribués dans les membres de gauche ou de droite en fonction de leur degré de dépendance en les variables dynamiques. On a également permuté certaines quantités impliquées dans les produits vectoriels par la propriété d'anticommutation. Ces manipulations prendront sens lors de l'expression matricielle de la dynamique au chapitre suivant.

## 6.4.2 Les rotations

On procède de la même manière pour les rotations. Pour le cas du satellite on fait apparaître la vitesse angulaire  $\vec{\omega}_{B/O}$  dans la dynamique en utilisant la décomposition vectorielle de l'équation 6.32 :

$$\begin{aligned}
& I_B \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{B/O})_O + I_B \vec{\omega}_{O/J} \times \vec{\omega}_{B/O} + I_B \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{O/J})_J \\
& \quad + (\vec{\omega}_{B/O} + \vec{\omega}_{O/J}) \times (I_B (\vec{\omega}_{B/O} + \vec{\omega}_{O/J})) \\
& \quad = \sum \vec{t}_B \quad (6.40)
\end{aligned}$$

On exprime ensuite l'équation 6.40 dans la base du référentiel  $O$ , ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
& I_B \dot{\omega}_{B/O}^B + \left( [\omega_{B/O}^B]^\times + [T_O^B \omega_{O/J}^O]^\times \right) I_B \omega_{B/O}^B \\
& \quad + \left( I_B [T_O^B \omega_{O/J}^O]^\times - [I_B T_O^B \omega_{O/J}^O]^\times \right) \omega_{B/O}^B \\
& \quad = \sum \vec{t}_B - I_B T_O^B \dot{\omega}_{O/J}^O - [T_O^B \omega_{O/J}^O]^\times I_B T_O^B \omega_{O/J}^O \quad (6.41)
\end{aligned}$$

La même démarche est entreprise pour établir la dynamique angulaire de la masse d'épreuve, qui s'écrit après expression dans la base du référentiel  $T$  de cette dernière :

$$\begin{aligned}
 & I_T^T \dot{\omega}_{T/H}^T + I_T^T T_B^T \dot{\omega}_{B/O}^B + I_T^T [T_O^T \omega_{O/J}^O]^\times T_B^T \omega_{B/O}^B \\
 & \quad + I_T^T \left( [T_B^T \omega_{B/O}^B]^\times + [T_O^T \omega_{O/J}^O]^\times \right) \omega_{T/H}^T \\
 & \quad = \sum t_T^T - I_T^T T_O^T \dot{\omega}_{O/J}^O \quad (6.42)
 \end{aligned}$$

# Chapitre 7

## Modèle en représentation d'état

Dans le domaine de l'automatique, une représentation particulièrement commode d'un système dynamique est la représentation dans l'espace des états. Dans une telle représentation, les variables dynamiques sont collectionnées dans un vecteur, appelé vecteur d'état, et les équations régissant la dynamique du système s'écrivent comme une équation matricielle engageant ce vecteur. Toutes les propriétés du problème dynamique sont alors contenues dans un ensemble de matrices, donnant ainsi accès à l'arsenal de l'analyse matricielle pour son analyse, sa résolution et son contrôle. On note aussi que cette représentation possède des propriétés d'autant plus remarquables lorsque la dynamique étudiée est linéaire et stationnaire. Par ailleurs, la représentation d'état permet aussi une modélisation simplifiée des systèmes de mesure, auxquels est également associé un ensemble de matrices décrivant notamment ses imperfections.

Dans ce chapitre, on construira une modélisation en représentation d'état de la dynamique définie dans la section précédente. On procèdera ensuite à la linéarisation de cette dynamique, travail nettement engagé par l'introduction du référentiel de consigne  $O$ , pour finalement se retrouver avec une représentation matricielle de la dynamique indépendante des variables d'état et du temps.

### 7.1 La représentation d'état

#### 7.1.1 Equation d'état

L'état dynamique du système Satellite-Masses d'épreuve est complètement défini par un ensemble de variables  $X_i$ , dites variables d'état, collectées dans un vecteur d'état  $\vec{X}$ . Ces variables d'état rassemblent donc à la fois les positions, orientations, vitesses et taux de rotation de chaque corps du système :

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} r_{B/O}^O & \alpha_{B/O} & \dot{r}_{B/O}^O & \omega_{B/O}^B \\ r_{T1/H1}^{H1} & \alpha_{T1/H1} & r_{T2/H2}^{H2} & \alpha_{T2/H2} \\ \dot{r}_{T1/H1}^{H1} & \omega_{T1/H1}^{T1} & \dot{r}_{T2/H2}^{H2} & \omega_{T2/H2}^{T2} \end{bmatrix}^T \quad (7.1)$$

Le vecteur  $\vec{X}(t)$  donne donc une représentation de l'état dynamique instantané du système. A l'aide cette représentation, les équations du mouvement du chapitre précédent peuvent s'écrire comme :

$$M(t, \vec{X}(t)) \dot{\vec{X}}(t) = A(t, \vec{X}(t)) \vec{X}(t) + B(t, \vec{X}(t)) \vec{u}(t) \quad (7.2)$$

où  $M$  est appelé matrice de masse,  $A$  matrice d'état et  $B$  matrice d'entrée. Ces matrices incarnent la modélisation des propriétés dynamiques du système. Elles peuvent éventuellement dépendre de l'état dynamique du système  $\vec{X}$  et du temps, traduisant respectivement une non-linéarité et une non-stationnarité de la dynamique. Grâce à cette représentation, on est passé d'un système de 18 équations différentielles du second ordre, à un système de 36 équations du premier ordre.

L'équation 7.2 est dite implicite, car elle fait intervenir une matrice de masse qui s'applique à la dérivée du vecteur d'état. Ainsi une représentation explicite est donnée par :

$$\dot{\vec{X}}(t) = M^{-1}A\vec{X}(t) + M^{-1}B\vec{u}(t) = A^*\vec{X}(t) + B^*\vec{u}(t) \quad (7.3)$$

où l'on introduit les matrices d'état  $A^*$  et d'entrée  $B^*$  de l'équation explicite.

Le vecteur  $\vec{u}(t)$  correspond aux entrées du système dynamique. Ici, il rassemble les forces et couples appliqués aux 3 corps du système :

$$\vec{u} = [f, t]^T \quad (7.4)$$

On distingue trois vecteurs d'entrée différents :

— Les forces et couples  $\vec{u}_{SC}$  appliqués au satellite seulement

$$B_{SC}\vec{u}_{SC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_B^O & t_B^B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

— Le vecteur  $\vec{u}_{TM}$  s'exerce uniquement sur les masses d'épreuve

$$B_{TM}\vec{u}_{TM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{T1}^{H1} & t_{T1}^{T1} & f_{T2}^{H2} & t_{T2}^{T2} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

- Les forces et couples  $\vec{u}_{TM-SC}$  qui s'appliquent aux masses d'épreuve avec recul du satellite. Il s'agit donc d'une interaction entre le satellite et les masses d'épreuve.

$$B_{TM-SC}\vec{u}_{TM-SC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -T_{H1}^O f_{T1}^{H1} - T_{H2}^O f_{T1}^{H1} & -T_{T1}^B t_{T1}^{T1} - T_{T2}^B t_{T2}^{T2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{T1}^{H1} & t_{T1}^{T1} & f_{T2}^{H2} & t_{T2}^{T2} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

On remarque que les matrices  $B$  sont essentiellement sollicitées pour la distribution des forces et couples du vecteur entrée  $\vec{u} = [\vec{u}_{SC}, \vec{u}_{TM}, \vec{u}_{TM-SC}]^T$  suivant les coordonnées dynamiques correspondantes et l'application de matrices de rotation pour leur expression dans les repères appropriés.

### 7.1.2 Matrices de la dynamique

A partir des équations de mouvement dans le référentiel de consigne  $O$  construites dans la section 6.4, on peut identifier les matrices  $M$ ,  $A$  et  $B$ .

- La matrice de masse contient l'essentiel des propriétés dynamiques du système :



$$\begin{array}{cccc}
\mathbb{1}_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & B(x_2) & 0 & 0 \\
2m_B [\omega_{O/J}^O]^\times & 0 & m_B \mathbb{1}_3 & 0 \\
0 & \left( [\omega_{B/O}^B]^\times I_B + [T_O^B \omega_{O/J}^O]^\times I_B + I_B [T_O^B \omega_{O/J}^O]^\times - [I_B T_O^B \omega_{O/J}^O]^\times \right) B(x_2) & 0 & I_B \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -m_T \left( [T_B^H \omega_{B/O}^B]^\times [r_{T/H}^H + r_{H/B}^H]^\times + 2 [T_B^H T_O^B \omega_{O/J}^O]^\times [r_{T/H}^H + r_{H/B}^H]^\times \right) T_B^H & 0 & -m_T [r_{T/H}^H + r_{H/B}^H]^\times T_B^H \\
0 & I_T^T [T_O^T \omega_{O/J}^O]^\times T_B^T B(x_2) & 0 & I_T^T T_B^T
\end{array}$$

$$M =$$

83

$$\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbb{1}_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & B(x_6) & 0 & 0 \\
2m_T [T_B^H \omega_{B/O}^B]^\times & 0 & m_T \mathbb{1}_3 & 0 \\
0 & I_T^T \left( [T_B^T \omega_{B/O}^B]^\times + [T_O^T \omega_{O/J}^O]^\times \right) B(x_6) & 0 & I_T^T
\end{array}
\tag{7.8}$$

- La matrice d'état établit essentiellement les relations différentielles entre positions et vitesses :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_B \left( [\dot{\omega}_{O/J}^O]^\times + [\omega_{O/J}^O]^\times [\omega_{O/J}^O]^\times \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

- Les matrices d'entrée  $B$  servent à distribuer les forces et couples en entrée suivant les variables dynamiques et à les exprimer dans la base de vecteurs appropriée.

$$B_{SC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & T_O^B \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{TM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & T_{T1}^{H1} \end{bmatrix} \quad B_{TM-SC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -T_O^{H1} & 0 \\ 0 & -T_B^{T1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & T_{T1}^{H1} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Selon leur nature, les forces et les couples extérieurs seront naturellement exprimés dans une certaine base. Les matrices  $B$  sont construites de manière à ce que les actuations commandées par le contrôleur soient exprimées dans une base conforme aux équations du mouvement. Il en résulte que tous les autres forces et couples agissant sur le système devront être exprimés dans une base bien déterminée, par anticipation de l'application de la matrice  $B$ .

### 7.1.3 Equation de sortie

A l'aide de la représentation d'état, on modélise également les systèmes de mesure des variables dynamiques. Dans une représentation linéaire, on peut construire d'une part une observable à partir d'une combinaison linéaire des variables dynamiques  $\vec{X}$ . Cette combinaison est assurée par une matrice notée  $C$ . D'autre part, cette équation autorise l'introduction d'éventuelles imperfections géométriques, appelées diaphonie, qui décrit les phénomènes de "fuite" d'un degré de liberté du système vers la mesure d'un second. La matrice  $D$  contient ces termes de diaphonie.

$$Y(t) = C\vec{X}(t) + D\vec{u}(t) \quad (7.11)$$

Dans la simulation, chaque système de mesure sera décrit à l'aide d'un modèle dynamique distinct, auquel sera d'ailleurs associée sa propre équation d'état, permettant alors la modélisation de la réponse temporelle du système de mesure (délai, constante de temps). Ainsi, pour les équations de mouvement, il ne sera pas défini d'équation de mesure. Les matrices  $C$  et  $D$  correspondantes s'écrivent alors simplement :

$$C_{EOM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbb{1}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{EOM} = 0 \quad (7.12)$$

## 7.2 Système linéaire et stationnaire

### 7.2.1 Résolution matricielle

On se concentre sur le cas particulier très important des systèmes dynamiques linéaires et stationnaires. De tels systèmes possèdent une représentation d'état particulièrement commode, les différentes matrices impliquées étant indépendantes du vecteur d'état et du temps en général.

$$M\dot{\vec{X}}(t) = A\vec{X}(t) + B\vec{u}(t) \quad (7.13)$$

Une solution générale analytique de ce type de système est ainsi donnée par :

$$\vec{X}(t + dt) = e^{A^*dt} \vec{X}(t) + \int_t^{t+dt} e^{A^*(t+dt-\tau)} B^* \vec{u}(\tau) d\tau \quad (7.14)$$

En supposant que le vecteur d'entrée  $\vec{u}$  est quasiment constant entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , il vient finalement :

$$\vec{X}(t + dt) = e^{A^*dt} \vec{X}(t) + A^{*-1} (e^{A^*dt} - \mathbb{1}) B^* \vec{u}(t) \quad (7.15)$$

On s'aperçoit alors que résoudre le système revient à manipuler les matrices  $A$  et  $B$ , au travers de l'exponentiation et de l'inversion matricielle notamment (ce qui est bien sûr rendu d'autant plus aisé lorsque les matrices sont bien conditionnées).

De même, étudier les propriétés du système dynamique, comme sa commandabilité ou son observabilité, se pratique également par opération matricielle. Ainsi, pour des tâches d'architecture de boucle de contrôle par exemple, il est fortement recommandé de se placer, lorsque cela est justifié mathématiquement, dans le cadre d'un système dynamique linéaire et stationnaire. Pour cette classe particulière de

dynamique, il existe une vaste littérature et de nombreuses techniques d'analyse et de design.

## 7.2.2 Principe de superposition

Il s'ajoute à cela une autre propriété essentielle de cette classe de dynamique : le principe de superposition. Ce principe s'applique à tout système linéaire d'équations différentielles. Il signifie que la réponse totale du système à une perturbation extérieure (dans le cas des équations du mouvement, les forces et les couples) qui se construit comme la somme de plusieurs perturbations secondaires simultanées correspond simplement à la somme des réponses individuelles du système aux signaux secondaires [32].

On illustre ce principe en remarquant que dans le cas d'une dynamique linéaire, la réponse d'un système peut être représentée par une fonction de transfert :

$$Y(s) = G(s)u(s) \quad (7.16)$$

où l'on introduit les transformées de Laplace des vecteurs d'entrée et de sortie. La variable  $s$  est une généralisation dans le corps des nombres complexes de la fréquence de Fourier. De manière schématique, la partie réelle de la variable de Laplace  $s$  ajoute la notion de temps de transition à la fréquence de Fourier, informant quant à elle seulement du caractère périodique d'un signal.

Pour les systèmes dynamiques linéaires, il existe une correspondance univoque entre une représentation d'état et la fonction de transfert du système<sup>1</sup> [32] :

$$G(s) = C(s\mathbf{1} - A)^{-1}B + D \quad (7.17)$$

où  $G(s)$  est éventuellement la matrice de fonctions de transfert d'un système Multiple-Input Multiple-Output system (*MIMO*) linéaire et stationnaire et en considérant que le vecteur d'état est nul à l'instant initial. Pour un système *MIMO* constitué de  $n$  entrées  $u_i$  et  $m$  sorties  $Y_j$ , on définit  $m \times n$  fonctions de transfert collectées dans la matrice  $G(s)$  :

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1i}(s) & \dots & G_{1n}(s) \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ G_{j1}(s) & \dots & G_{ji}(s) & \dots & G_{jn}(s) \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ G_{m1}(s) & \dots & G_{mi}(s) & \dots & G_{mn}(s) \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

---

1. L'inverse n'est pas vrai, car il existe une infinité de représentations d'état possibles pour un même système.

Le principe de superposition s'énonce alors comme :

$$Y_j = \sum_{i=1}^n G_{ji} u_i \quad (7.19)$$

Dans la suite, cette propriété fondamentale permettra, en outre, l'analyse de l'influence des bruits et imperfections de chaque sous-système sur l'accélération résiduelle finale des masses d'épreuve.

## 7.3 Linéarisation de la dynamique

### 7.3.1 Dynamique au premier ordre

De manière très générale, l'équation d'état d'un système non-linéaire, comme celle de l'équation 7.3, se présente dans le cadre de la représentation d'état sous la forme suivante :

$$\dot{\vec{X}}(t) = f\left(\vec{X}(t), \vec{u}(t)\right) \quad (7.20)$$

où la fonction  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  caractérisant la dynamique du système dépend de son état instantané  $\vec{X}(t)$  de dimension  $n$  et du vecteur d'entrée  $\vec{u}(t)$  de dimension  $m$ . Le point  $\vec{X}_e$  est appelé point d'équilibre du système si pour un vecteur d'entrée spécifique  $\vec{u}_e$ , appelé entrée d'équilibre, la fonction  $f$  évaluée en ce point s'annule :

$$f\left(\vec{X}_e, \vec{u}_e\right) = \vec{0} \quad (7.21)$$

Par conséquent, si l'état initial du système est tel que  $\vec{X}(t = 0) = \vec{X}_e$  et que ce système est soumis à l'entrée  $\vec{u}(t) = \vec{u}_e$  à chaque instant  $t$ , alors l'état du système se maintient à  $\vec{X}(t) = \vec{X}_e$  pour tout  $t \geq 0$ . C'est pourquoi l'on parle d'état d'équilibre. En analysant le signe<sup>2</sup> de la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial \vec{X}}|_{\vec{X}_e, \vec{u}_e}$  de la fonction  $f$  évaluée en  $(\vec{X}_e, \vec{u}_e)$ , on étudie la stabilité du point d'équilibre  $\vec{X}_e$ . L'objectif de la boucle d'asservissement du système est justement de stabiliser la dynamique. Ces valeurs propres<sup>3</sup> pour le système dynamique soumis à la loi de contrôle devront être négatives, signifiant que tout écart à la position d'équilibre suscitera des forces attractives qui tendent à ramener l'état du système  $\vec{X}$  au point d'équilibre  $\vec{X}_e$ .

La linéarisation de la dynamique s'effectue alors par changement de variable, en décrivant l'état du système par le vecteur  $\delta\vec{X} = \vec{X} - \vec{X}_e$ , traduisant l'écart entre

---

2. Plus précisément, on analyse le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice.

3. On parle en général de pôles réels quand l'on se place dans le domaine fréquentiel.

l'état du système  $\vec{X}$  et le point d'équilibre  $\vec{X}_e$ . On introduit de la même manière de nouvelles variables d'entrée  $\vec{\delta u} = \vec{u} - \vec{u}_e$ . En supposant que l'on soit au voisinage de l'équilibre à l'instant initial, la stabilité du système permet d'affirmer que les nouvelles variables se maintiendront proches de zéro, justifiant ainsi un développement de Taylor de la dynamique  $f$  au premier ordre. L'équation d'état non-linéaire en 7.20 s'écrit maintenant :

$$\dot{\delta \vec{X}}(t) = f\left(\vec{X}_e + \delta \vec{X}(t), \vec{u}_e + \vec{\delta u}(t)\right) \quad (7.22)$$

On pratique alors autour du point d'équilibre  $(\vec{X}_e, \vec{u}_e)$  la linéarisation Jacobienne [13] du système non-linéaire à l'équation 7.22 qui aboutit à :

$$\dot{\delta \vec{X}}(t) = A_0^* \delta \vec{X}(t) + B_0^* \vec{\delta u}(t) \quad (7.23)$$

en introduisant les matrices d'état  $A_0^*$  et d'entrée  $B_0^*$ , cette fois-ci indépendantes de l'état du système, telles que :

$$A_0^* = \left. \frac{\partial f}{\partial \vec{X}} \right|_{\vec{X}_e, \vec{u}_e} \quad B_0^* = \left. \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} \right|_{\vec{X}_e, \vec{u}_e} \quad (7.24)$$

Dans le cas particulier auquel on s'intéresse, on rappelle que la loi de contrôle a pour consigne de centrer les masses et de les orienter correctement dans leur compartiment. Ce qui signifie que les référentiels  $T$  associés aux masses d'épreuve doivent se confondre avec les référentiels  $H$  liés aux compartiments. Parce que les variables dynamiques des masses d'épreuve ont été définies par rapport au référentiel  $H$ , l'état d'équilibre est atteint pour les masses d'épreuve lorsque  $[r_{T/H}^H, \alpha_{T/H}, \dot{r}_{T/H}^H, \omega_{T/H}^T] = [0, 0, 0, 0]$ . De même, pour l'attitude du satellite, depuis l'introduction du référentiel  $O$  en section 6.3, l'équilibre est obtenu quand  $[\alpha_{B/O}, \omega_{B/O}^B] = [0, 0]$ . Cela signifie dans ce cas que le point d'équilibre du système asservi est alors simplement  $\vec{X}_e = \vec{0}$ .

Cependant, concernant la définition de l'entrée d'équilibre, on rencontre une difficulté. En effet, pour le système à équilibre à l'instant initial, les forces et couples nécessaires  $\vec{u}_e(t)$  pour maintenir le système à l'équilibre, à tout instant  $t \geq 0$ , évoluent dans le temps. On peut le remarquer en réalisant par exemple que pour poursuivre l'attitude du référentiel  $O$ , le satellite doit contrer des forces d'inertie, phénomène que l'on appelle la raideur gyroscopique du solide, et ces dernières évoluent tout au long de la trajectoire orbitale. On peut montrer qu'en présence de ce type d'instationnarité, on peut linéariser la dynamique en introduisant les matrices dépendantes du temps :

$$A_0^*(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial \vec{X}} \right|_{\vec{X}_e, \vec{u}_e(t)} \quad B_0^*(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} \right|_{\vec{X}_e, \vec{u}_e(t)} \quad (7.25)$$

On parle alors de linéarisation autour de la trajectoire  $[\vec{X}_e, \vec{u}_e(t)]$  [30]. Dans ce cadre, le système dynamique de l'équation 7.3 est linéarisé autour de  $(\vec{X}_e = \vec{0}, \vec{u}_e(t))$  et prend la forme suivante :

$$\dot{\vec{X}}(t) = A_0^*(t)\vec{X}(t) + B_0^*(t)(\vec{u}(t) - \vec{u}_e(t)) \quad (7.26)$$

Les nouvelles matrices d'état  $A_0^*$  et d'entrée  $B_0^*$  sont données à partir des équations 7.3 et 7.25 par :

$$A_0^*(t) = A^*(t, \vec{0}) \quad B_0^* = B^*(t, \vec{0}) \quad (7.27)$$

### 7.3.2 Système stationnaire

L'équation d'état en 7.26 traduit un système linéaire et instationnaire. La propriété d'instationnarité de la dynamique est supportée par les forces d'inertie introduites par le caractère non-inertiel des référentiels utilisés pour la mise en place des équations du mouvement. Lors de la construction de ces équations, on a pris soin de décomposer ces forces apparentes en deux catégories :

- Les forces d'inertie qui ne dépendent pas des variables d'état  $\vec{X}$  du système. Elles s'interprètent comme les forces d'inertie que ressentirait le corps étudié s'il décrivait parfaitement sa trajectoire ou son attitude de consigne.
- Les forces d'inertie qui se construisent comme un terme quadratique impliquant la trajectoire ou l'attitude de consigne et une des variables d'état. Elles représentent un terme de correction pour tenir compte du fait que le corps, en réalité, ne peut pas suivre parfaitement son régime de consigne et les forces d'inertie réellement ressenties diffèrent très légèrement des forces précédentes.

La dépendance temporelle des matrices  $A_0^*(t)$  et  $B_0^*(t)$  provient exclusivement du couplage entre les forces d'inertie et les variables d'état, mentionné dans cette dernière catégorie. Le souhait d'obtenir un modèle stationnaire nous contraint de négliger cette catégorie de forces, qui impliquent néanmoins des termes quadratiques du second ordre. En réalisant cette approximation, l'équation d'état en ?? devient finalement :

$$\boxed{\dot{\vec{X}}(t) = A_0^* \vec{X}(t) + B_0^* (\vec{u}(t) - \vec{u}_e(t))} \quad (7.28)$$

avec :

$$A_0^* = A^*(0, \vec{0}) \quad B_0^* = B^*(0, \vec{0}) \quad (7.29)$$

On se rend compte alors que la transition entre le système non-linéaire et instationnaire de l'équation 7.3 et le système linéaire et stationnaire de l'équation 7.28 s'opère simplement en considérant les matrices  $A_0^*(t, \vec{X}(t))$  et  $B_0^*(t, \vec{X}(t))$  constantes et évaluées à l'instant initial et à l'état nominal. L'effort réalisé lors de la mise en place des équations du mouvement afin d'obtenir un vecteur d'état nominal nul, en introduisant notamment le référentiel de consigne  $O$ , apparaît récompensé ici, en permettant de basculer simplement entre un modèle dynamique général et un système simplifié, linéaire et stationnaire.

## 7.4 Forces et couple gravitationnelles

La procédure de linéarisation concerne également certaines entrées qui dépendent explicitement de l'état dynamique du système. C'est le cas des forces d'inertie, déjà traité naturellement dans la section précédente, que l'on évalue à l'état de consigne du système. La même stratégie est appliquée pour les forces et couples gravitationnels s'exerçant sur les trois corps.

### 7.4.1 Force de dérive gravitationnelle

Dans l'équation 6.34, on a décomposé la dynamique du satellite en ne considérant que les forces non-gravitationnelles, notées par la suite  $\vec{f}_{dist,B}$ , lui étant appliquées :

$$\sum \vec{f}_{dist,B} = \sum \vec{f}_B - \vec{f}_{grav,O} \quad (7.30)$$

On peut introduire cette décomposition des forces appliquées au satellite dans le membre de droite de l'équation 6.14 donnant la dynamique translationnelle de la masse d'épreuve :



$$\begin{aligned}
& \sum \vec{f}_T - \frac{m_T}{m_B} \sum \vec{f}_B \\
&= \sum \vec{f}_T - \frac{m_T}{m_B} \left( \sum \vec{f}_{dist,B} + \vec{f}_{grav,O} \right) \\
&= \sum \vec{f}_{dist,T} + \vec{f}_{grav,T} - \frac{m_T}{m_B} \left( \sum \vec{f}_{dist,B} + \vec{f}_{grav,O} \right) \\
&= \sum \vec{f}_{dist,T} - \frac{m_T}{m_B} \sum \vec{f}_{dist,B} + m_T (\vec{a}_{grav,T} - \vec{a}_{grav,O}) \\
&= \sum \vec{f}_{dist,T} - \frac{m_T}{m_B} \sum \vec{f}_{dist,B} + \delta \vec{f}_{grav,T/O} \tag{7.31}
\end{aligned}$$

où l'on introduit la quantité  $\delta \vec{f}_{grav,T/O}$  qui correspond physiquement à la force d'origine gravitationnelle appliquée sur la masse d'épreuve apparente dans le référentiel du satellite. Cette force est à l'origine de la dérive gravitationnelle de la masse d'épreuve par rapport au satellite évoquée dans la section 5.4.

La force de dérive gravitationnelle  $\delta \vec{f}_{grav,T/O}$  est déterminée à partir du développement limité de la force gravitationnelle exercée sur  $O$ , en considérant que cette dernière est très proche de la force vue par la masse d'épreuve. Ainsi, on trouve au premier ordre :

$$\begin{aligned}
\delta \vec{f}_{grav,T/O} = \frac{m_T}{m_B} & \left[ \vec{\nabla} \left( \vec{f}_{grav,O} \cdot \vec{e}_{x,J} \right) \cdot \vec{r}_{T/O} \right] \vec{e}_{x,J} \\
& + \frac{m_T}{m_B} \left[ \vec{\nabla} \left( \vec{f}_{grav,O} \cdot \vec{e}_{y,J} \right) \cdot \vec{r}_{T/O} \right] \vec{e}_{y,J} \\
& + \frac{m_T}{m_B} \left[ \vec{\nabla} \left( \vec{f}_{grav,O} \cdot \vec{e}_{z,J} \right) \cdot \vec{r}_{T/O} \right] \vec{e}_{z,J} \tag{7.32}
\end{aligned}$$

avec  $\vec{r}_{T/O} = \vec{r}_{T/B} + \vec{r}_{B/O}$ . Afin d'éliminer la dépendance explicite de cette force aux variables d'état, on est amené à faire l'approximation que le satellite et la masse d'épreuve coïncident en permanence avec leur régime de consigne, c'est-à-dire que  $\vec{r}_{B/O} \approx \vec{0}$  et  $\vec{r}_{T/B} \approx \vec{r}_{H/B}$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\delta \vec{f}_{grav,T/B} = \frac{GM_{\odot}m_T}{R^3} & \left[ \left( \frac{3X^2}{R^2} - 1 \right) \delta X + \frac{3XY}{R^2} \delta Y + \frac{3XZ}{R^2} \delta Z \right] \vec{e}_{x,J} \\
& + \frac{GM_{\odot}m_T}{R^3} \left[ \frac{3YX}{R^2} \delta X + \left( \frac{3Y^2}{R^2} - 1 \right) \delta Y + \frac{3YZ}{R^2} \delta Z \right] \vec{e}_{y,J} \\
& + \frac{GM_{\odot}m_T}{R^3} \left[ \frac{3ZX}{R^2} \delta X + \frac{3ZY}{R^2} \delta Y + \left( \frac{3Z^2}{R^2} - 1 \right) \delta Z \right] \vec{e}_{z,J} \tag{7.33}
\end{aligned}$$

avec  $r_{B/J}^J \approx r_{O/J}^J = (X, Y, Z)$ ,  $\|\vec{r}_{O/J}\| = R$  et  $r_{T/O}^J \approx r_{H/B}^J = (\delta X, \delta Y, \delta Z)$ . Cette force s'interprète alors comme la force de marée exercée entre le satellite poursuivant

une trajectoire képlérienne non-perturbée (le centre des masses du satellite  $B$  est confondu avec le point  $O$ ) et une masse d'épreuve parfaitement positionnée dans son compartiment (le centre de la masse  $T$  confondu avec le centre du compartiment  $H$ ).

### 7.4.2 Couple gravitationnel

Un corp solide plongé dans un champ gravitationnel est en général<sup>4</sup> soumis à un couple gravitationnel, du fait du gradient de champ observé sur tout son volume. Le couple gravitationnel subi par un solide de moment d'inertie  $I$  dans le champ gravitationnel solaire est donné par la relation vectorielle suivante [38] :

$$\vec{t}_{grav} = \frac{3GM_{\odot}}{R^3} \vec{e}_r \times (I \vec{e}_r) \quad (7.34)$$

où  $\vec{R} = R \vec{e}_r$  est le vecteur de norme  $R$  reliant le centre du Soleil au centre des masses du solide. Au même titre que la force de dérive gravitationnelle, ce couple est évalué à la position de consigne des corps exposés, pour éliminer la dépendance à l'état dynamique du système. Pour le satellite le couple utilisé est donné par :

$$t_{grav,B}^B \approx t_{grav,O}^O = T_J^O \left[ \frac{3GM_{\odot}}{\|\vec{r}_{O/J}\|^3} [e_r^J]^{\times} (T_O^J I_B^B T_J^O) e_r^J \right] \quad (7.35)$$

En ce qui concerne les masses d'épreuve, le couple gravitationnel s'écrit de manière similaire :

$$t_{grav,T}^T = T_J^T \left[ \frac{3GM_{\odot}}{\|\vec{r}_{O/J}\|^3} [e_r^J]^{\times} (T_T^J I_T^T T_J^T) e_r^J \right] \quad (7.36)$$

Or, comme évoqué dans la section 6.1.1, le tenseur d'inertie  $I_T^T$  des masses d'épreuve exprimé dans la base de leur référentiel respectif  $T$  est un multiple de la matrice identité, ce qui entraîne l'annulation de l'expression du couple à l'équation 7.34 :

$$t_{grav,T}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

---

4. Cela dépend du degré de symétrie du solide en question. Pour un tenseur d'inertie  $I$  particulier, comme celui d'une sphère qui est un multiple de la matrice identité dans n'importe quel système d'axe, le couple gravitationnel disparaît.

## Troisième partie

### Simulateur

Dans la partie précédente, on a construit un modèle linéaire de la dynamique des satellites de *LISA* à l'aide de la représentation d'état. Ce modèle dynamique renseigne de la réponse du système "Satellite-Masses d'épreuve" à toutes perturbations externes ou commandées. Il est inscrit dans une boucle de rétroaction qui, à partir de mesures imparfaites des variables dynamiques, commandent les actuations nécessaires pour rendre ces variables nominales. On rappelle que les valeurs nominales correspondent à des masses d'épreuve centrées et correctement orientées dans leur logement, et une orientation des satellites optimisant le pointage des télescopes. Afin d'assurer cet objectif, le système de contrôle se trouvera alors contraint d'agir mécaniquement sur les masses d'épreuve, soit intentionnellement, par commande directe via le système d'actuation électrostatique soit accidentellement, au travers des imperfections du système (raideurs, diaphonie).

Un objectif essentiel de ce simulateur est alors d'estimer l'accélération subie par les masses d'épreuve et impliquée par le système en boucle fermée. Cette accélération résiduelle, bien qu'incontournable, est indésirable car elle imite, par principe d'équivalence, les effets d'une onde gravitationnelle sur la réponse d'un bras de *LISA*. Ainsi, par l'intermédiaire de ce simulateur, on désire estimer l'amplitude et le comportement fréquentiel de cette accélération résiduelle affectant nettement la sensibilité de *LISA* à basse fréquence. En particulier, profitant du principe de superposition rendu permis par la linéarité du système, on étudiera les contributions de chaque sous-système sur ce bruit d'accélération. Cet analyse constitue un remarquable outil de compréhension du système et des interactions de ses constituants, de leur bruit et de leurs imperfections dans la boucle d'asservissement.

# Chapitre 8

## Le simulateur LISA

### 8.1 Diagramme en bloc

Une vue d'ensemble commode du système en boucle fermée est donnée par le diagramme en bloc en figure 8.1. Sur cette figure est représenté chaque sous-système du simulateur. Le sous-système "*Dynamique du système*" correspond aux équations du mouvement dégagées dans la partie précédente.

On présente brièvement l'enchaînement des sous-systèmes du simulateur :

- Les variables dynamiques en sortie du bloc "*Dynamique du système*" sont mesurées par le sous-ensemble "*Mesure*". Ce dernier décrit d'une part la manière dont on construit les observables à partir des variables dynamiques, et d'autre part les imperfections de mesure comme les éventuels délais ou la diaphonie.
- A ce vecteur d'observable est ajouté un bruit de mesure, dont l'amplitude et les caractéristiques fréquentielles sont déterminées par le bloc "*Modèles de bruit de mesure*".
- Ce vecteur de mesure bruitée est ensuite soustrait à un signal de consigne (nul dans notre cas, cf. section 7.3) pour produire le signal d'erreur.
- Un système de contrôleurs, appelé Drag-Free and Attitude Control System (*DFACS*), se nourrit alors du signal d'erreur afin de commander les forces adéquates nécessaires à son annulation et ainsi stabiliser le système dynamique initialement instable.
- Cette commande parvient alors au bloc "*Actuation*" qui en déduit les forces réellement appliquées par les actionneurs, en tenant compte de l'effet des caractéristiques et imperfections modélisées (gain, délai, diaphonie).
- De même que pour la mesure, un bruit d'actuation, dont les propriétés sont introduites par le bloc "*Modèles de bruit d'actuation*", est ajouté aux actions délivrées.

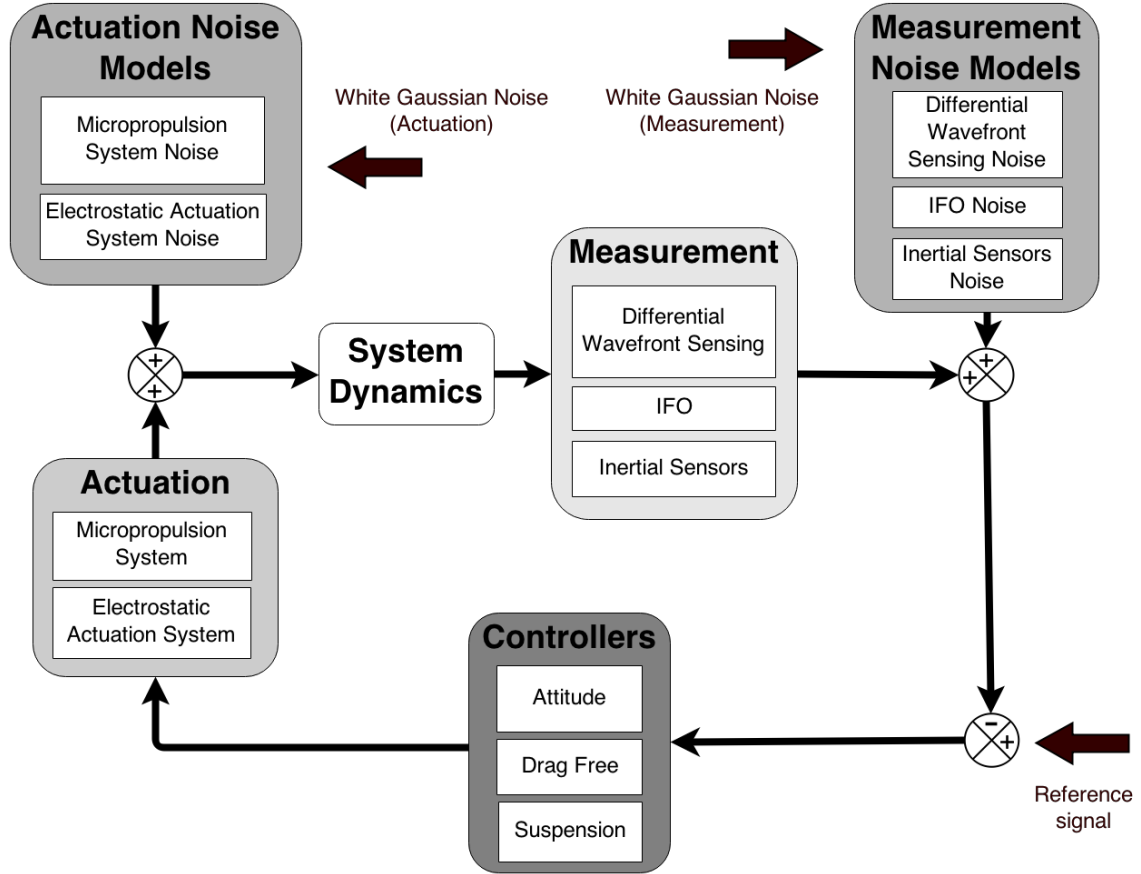


FIGURE 8.1 – Diagramme en bloc du système en boucle fermée. Chaque bloc correspond à un modèle en représentation d'état linéaire et stationnaire. La connexion des entrées et des sorties de chaque bloc génère un modèle en boucle fermée global également décrit par une représentation d'état linéaire et stationnaire.

- Enfin ces forces d'actuation, éventuellement accompagnées de perturbations externes au système, sont exercées sur le satellite et les masses d'épreuve, affectant les variables dynamiques du système.

Les blocs sont constitués de sous-catégories où l'on distingue les différents systèmes de mesure et d'actuation sollicités pour chaque variable dynamique à contrôler. Dans les sections suivantes, on passe en revue l'ensemble des blocs, en explicitant notamment les sous-systèmes de mesure et d'actuation utilisés pour le traitement de chaque voie d'entrée de nature différente. Les différents modèles sont construits à partir d'informations tirées à la fois du simulateur *LPF* [35] [3], en particulier pour les matrices de diaphonie, et de documents techniques de l'industriel *Airbus Defence & Space* [17] [16] [18] concernant spécifiquement l'expérience *LISA*, notamment pour les modèles de bruit des senseurs et actuateurs.

On note par ailleurs qu'au travers de ces modèles, l'industriel fournit en réalité des niveaux de spécification. Ainsi, il estime pour chaque senseur et actuateur une limite supérieure pour les niveaux de bruit nécessaires à la réalisation des objectifs en terme de bruit d'accélération, c'est-à-dire un niveau de  $3 \cdot 10^{-15} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2}$  à  $1 \text{ mHz}$ .

## 8.2 Système de mesure

Dans LISA Technology Package (*LTP*), on distingue trois sous-systèmes de mesure des variables dynamiques internes, à savoir un système de mesure différentielle de front d'onde (DWS pour *Differential wavefront sensing*), un système d'interférométrie laser embarqué (IFO pour *InterFerOmeter*) et un système de senseurs inertiels capacitifs (IS pour *Inertial Sensors*).

### 8.2.1 Mesure différentielle de front d'onde DWS

C'est la technique de mesure utilisée pour déterminer l'attitude  $\vec{\alpha}_{B/O}$  des satellites. Cette technique est basée sur l'analyse du front d'onde de l'émission laser en provenance du satellite distant. Un photodétecteur à quatre quadrants reçoit le signal laser distant. Les différents états de phase de l'onde interceptée par chaque quadrant renseigne alors de l'angle d'arrivée du front d'onde sur le photodétecteur. Cet angle d'arrivée dépend notamment de l'attitude relative des satellites. Ainsi, au niveau du satellite local, un pointage correct est équivalent à l'annulation de ce déphasage observé entre les quadrants et un parallélisme entre le plan du photodétecteur et le plan du front d'onde. On constate néanmoins que seuls deux degrés de liberté angulaire sont contraints avec cette technique, car par symétrie, le système est insensible aux rotations du photodétecteur autour du vecteur d'onde. Néanmoins, en combinant l'analyse des deux fronts d'onde en arrivée, cette dégénérescence peut être levée.

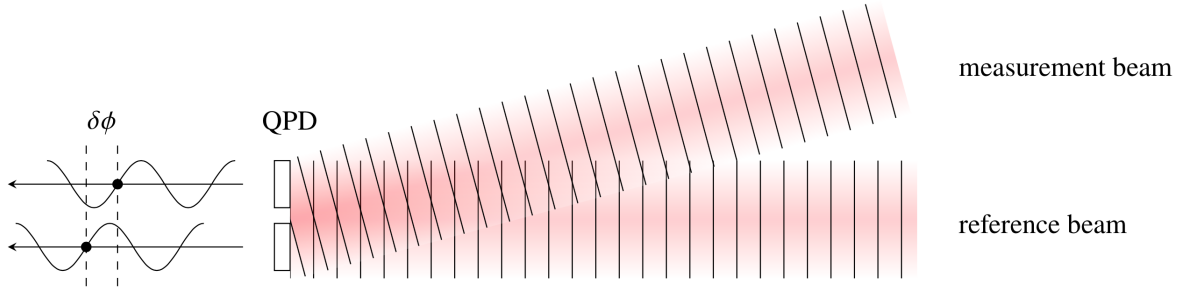


FIGURE 8.2 – *Mesure différentielle de front d'onde. L'écart à la normale de l'angle d'incidence du faisceau laser sur la photodiode engendre une différence de phase entre les signaux reçus sur chaque quadrant.*

### Bloc DWS

Dans le simulateur, ce système de mesure va donc se charger d'évaluer l'attitude  $\vec{\alpha}_{B/O}$  du satellite. Pour le moment, le simulateur ne contient pas de réelle modélisation de ce système de mesure. Les observables délivrées par le sous-système sont donc pour l'instant les variables dynamiques elles-mêmes. La représentation d'état associé à ce sous-système est alors simplement :

$$A_{DWS} = 0 \quad B_{DWS} = 0 \quad (8.1)$$

$$C_{DWS} = 0 \quad D_{DWS} = \mathbb{1}_3 \quad (8.2)$$

$$(8.3)$$

## Bloc modèle de bruit DWS

Dans la documentation technique d'*Airbus Defence & Space* [18], la spécification suivante est donnée pour le niveau de bruit sur la détermination de l'attitude :

$$F_{DWS} = \frac{(s + 5.10^{-3})^2}{(s + 1.10^{-5})^2} \quad (8.4)$$

Le design de ce filtre est basé sur la réalisation des objectifs de *LISA* en terme de performance de pointage. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert est tracé dans la figure 8.3.

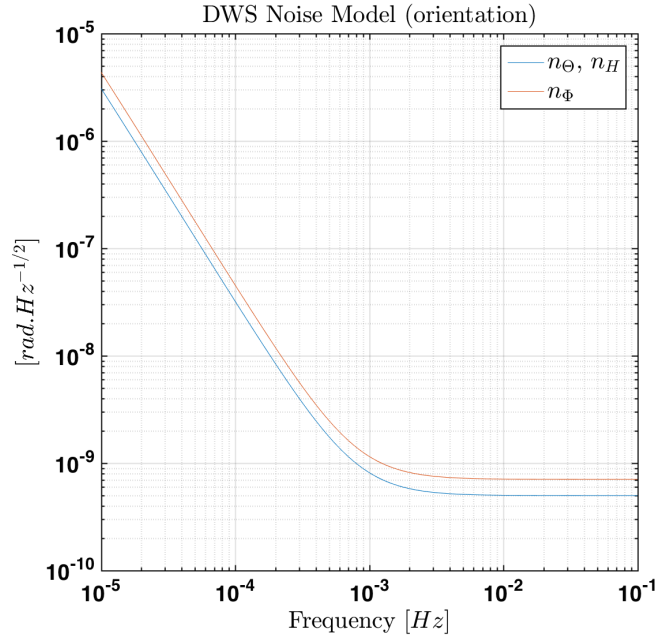


FIGURE 8.3 – Fonction de transfert du modèle de bruit du système de mesure DWS transformant un bruit uniforme pour les angles d'incidence  $\alpha$  et  $\beta$  des faisceaux laser distants en un bruit dépendant de la fréquence pour les variables dynamiques  $\theta$ ,  $\eta$ , et  $\varphi$  (par application de la matrice de composition à l'équation 8.8)

La mesure angulaire de ce système concerne deux angles, notés  $\alpha$  et  $\beta$ , autour de deux axes situés dans le plan du photodétecteur  $\vec{y}_H$  et  $\vec{z}_H$ . Les facteurs d'échelle suivants sont prescrits par *Airbus Defence & Space* [18] :



$$n_{\alpha_1}^{DWS} = 1.10^{-9} \text{ rad Hz}^{-1/2} \quad n_{\beta_1}^{DWS} = 1.10^{-9} \text{ rad Hz}^{-1/2} \quad (8.5)$$

$$n_{\alpha_2}^{DWS} = 1.10^{-9} \text{ rad Hz}^{-1/2} \quad n_{\beta_2}^{DWS} = 1.10^{-9} \text{ rad Hz}^{-1/2} \quad (8.6)$$

$$(8.7)$$

Pour retrouver le bruit de mesure équivalent sur l'attitude du satellite  $\vec{\alpha}_{B/O}$ , on se rappelle que l'écart angulaire entre les télescopes est de  $60^\circ$ . En considérant  $\alpha$  et  $\beta$  comme étant de petits angles, ce qui revient à considérer un système d'axes inchangé après une séquence de rotation, il vient :

$$\vec{\alpha}_{B/O} = \begin{pmatrix} \Theta \\ H \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

La fonction de transfert est convertie en représentation d'état pour l'assemblage final de l'ensemble des sous-modules du simulateur. A partir d'un bruit blanc, constituant une variable d'entrée du simulateur, on construit à l'aide de ce filtre un bruit coloré qui est ajouté à la mesure correspondante. Il en sera de même pour chacun des bruits impliqués.

## 8.2.2 Mesures interférométriques du déplacement des masses d'épreuve (IFO)

Pour la mesure de plusieurs des degrés de liberté des masses d'épreuve, le système interférométrique est utilisé (cf. section 3.1). C'est l'instrument de mesure de déplacement le plus précis du système *LTP*. Un faisceau laser, préalablement séparé par un polariseur, est réfléchi par la masse d'épreuve jouant ici le rôle d'un miroir. Le déplacement de la masse induit une variation de chemin optique du faisceau incident. Après recombinaison des deux faisceaux, l'interférence hétérodyne renseigne du déphasage et donc du déplacement instantané de la masse d'épreuve.

### Bloc IFO

En particulier, cet interféromètre sera utilisé pour évaluer les déplacements  $x_{T1/H1}^{H1}$  et  $x_{T2/H2}^{H2}$  des masses d'épreuve dans leur logement. Par ailleurs, le système de mesure différentielle de front d'onde est également utilisé pour estimer les angles  $\eta_{T1/H1}$ ,  $\varphi_{T1/H1}$ ,  $\eta_{T2/H2}$  et  $\varphi_{T2/H2}$  autour des axes *Y* et *Z* des logements respectifs. Dans le simulateur, ce système est simplifié en incluant simplement des termes de diaphonie entre les degrés de liberté de mesure, à l'instar de ce qui est modélisé dans le simulateur *LPF*.

$$A_{IFO} = 0 \quad B_{IFO} = 0 \quad (8.9)$$

$$C_{IFO} = \mathbb{1}_3 \quad D_{IFO} = \chi^{IFO} \quad (8.10)$$

$$(8.11)$$

On note que dans sa version standard, les termes de diaphonie concernant l'interféromètre sont négligés dans le simulateur et  $D_{IFO}$  est dans ce cas la matrice unité.

### Bloc modèle de bruit IFO

Pour la mesure interférométrique, on utilise la fonction de transfert suivante pour modèle de bruit [18] :

$$F_{IFO} = \frac{(s + 1.10^{-2})}{(s + 1.10^{-6})} \quad (8.12)$$

Les gains sur chaque voie sont obtenus après application des facteurs d'échelle suivants [18] :

$$n_x^{IFO} = 3.10^{-11} \text{m Hz}^{-1/2} \quad (8.13)$$

$$n_\eta^{IFO} = 2.10^{-8} \text{rad Hz}^{-1/2} \quad (8.14)$$

$$n_\varphi^{IFO} = 2.10^{-8} \text{rad Hz}^{-1/2} \quad (8.15)$$

### 8.2.3 Senseurs inertiels (IS)

L'ensemble des degrés de liberté dynamique des masses d'épreuve est également mesuré par les senseurs inertiels. Il s'agit d'un ensemble d'électrodes réparties sur les parois internes du logement, à la fois chargées de mesurer et d'agir sur la position et l'attitude des masses d'épreuve (cf. figure 8.5). Ces électrodes, associées à la surface conductrice des masses d'épreuve, constituent un système de capacité. La tension aux bornes de celles-ci est mesurée ou modifiée pour le contrôle de la dynamique des masses d'épreuve.

### Bloc IS

Les variables dynamiques prises en charge par ce système sont donc  $r_{T/H}^H$  et  $\alpha_{T/H}^H$ , à nouveau respectivement pour les deux masses d'épreuve. La même modélisation très simplifiée est donnée pour ce système et également tirée du modèle *LPF*.

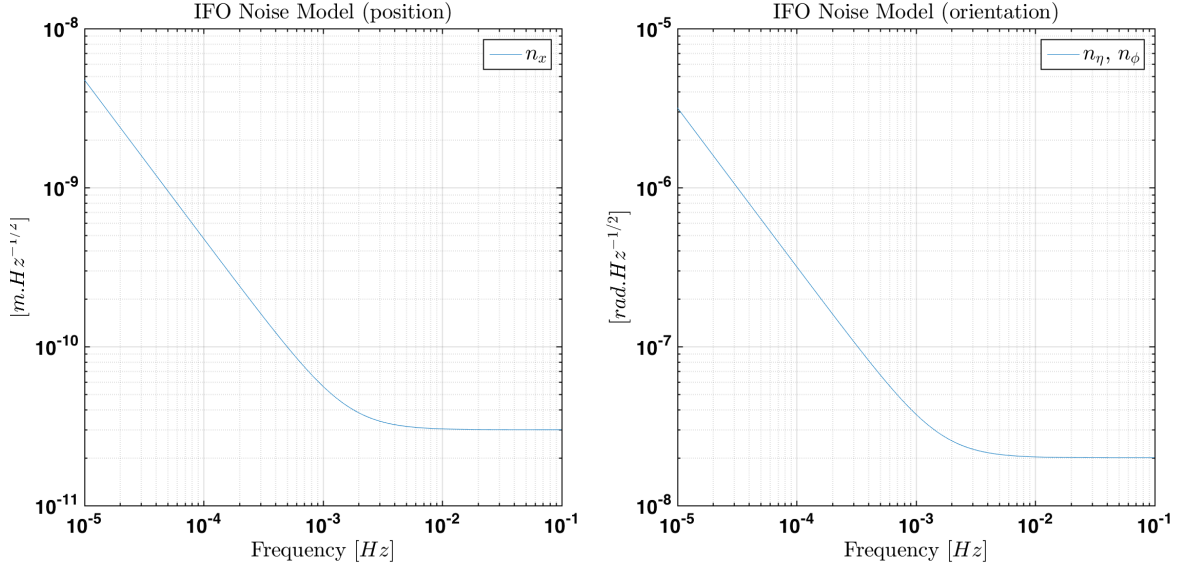


FIGURE 8.4 – Fonctions de transfert du modèle de bruit du système de mesure IFO. **A gauche :** Niveau de bruit pour la mesure du déplacement des masses d'épreuve suivant l'axe  $\vec{x}$ . **A droite :** Niveau de bruit pour la mesure des déplacements angulaires  $\eta$  et  $\phi$  des masses d'épreuve (rotation respectivement autour des axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ ).

$$A_{IS} = 0 \quad B_{IS} = 0 \quad (8.16)$$

$$C_{IS} = 0 \quad D_{IS} = \begin{bmatrix} \chi^{IS} & 0 \\ 0 & \chi^{IS} \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

Cette fois-ci, les valeurs standards de la diaphonie des senseurs inertiels utilisées dans le simulateur *LPF* sont non nulles et données par :

$$\chi^{IS} = \begin{bmatrix} 1 & 0,003 & 0,003 & 0,000598 & 0,000598 & 0,000598 \\ 0,003 & 1 & 0,003 & 0,000598 & 0,000598 & 0,000598 \\ 0,003 & 0,003 & 1 & 0,000598 & 0,000598 & 0,000598 \\ 0,086957 & 0,086957 & 0,086957 & 1 & 0,001 & 0,001 \\ 0,086957 & 0,086957 & 0,086957 & 0,001 & 1 & 0,001 \\ 0,086957 & 0,086957 & 0,086957 & 0,001 & 0,001 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \text{m rad}^{-1} \\ \text{rad m}^{-1} & \cdot \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

où l'on distingue quatre sous-blocs  $3 \times 3$  d'unités physiques différentes (dont deux sans unité). Dans cette matrice, on intègre également les termes diagonaux qui correspondent aux gains statiques de la mesure. Les termes croisés représentent quant à eux les termes de diaphonie. Par exemple, le terme  $\chi_{24}^{IS}$  s'interprète comme la proportion du déplacement angulaire  $\eta$  de la masse d'épreuve observée par les senseurs inertiels comme un déplacement linéaire suivant l'axe  $\vec{y}$  du compartiment. On le note plus explicitement  $\chi_{\eta \rightarrow y}^{IS}$ . Ces phénomènes de diaphonie, en particulier ceux concernant l'actuation capacitive qui se révéleront très influents dans notre étude, seront discutés plus en détail dans la section 10.4.2.

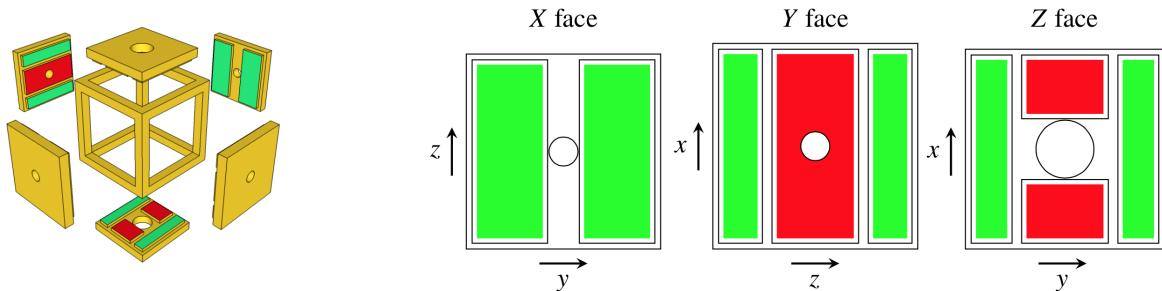


FIGURE 8.5 – **A gauche** : les parois intérieures du compartiment de la masse d'épreuve sont recouvertes d'un ensemble d'électrodes. Elles forment avec la surface de la masse un système de capacités utilisé pour la mesure de la position de cette dernière mais également pour exercer des forces électrostatiques de contrôle. **A droite** : disposition des électrodes sur les différentes faces. Les vecteurs font référence à la base du référentiel associé au compartiment (cf. section 5.1)

## Bloc modèle de bruit IS

Le comportement fréquentiel du bruit des senseurs inertiels est modélisé par la fonction de transfert suivante [18] :

$$F_{IS} = \frac{(s + 5.10^{-4})}{(s + 1.10^{-6})} \quad (8.19)$$

Les gains sur chacun des degrés de liberté sont donnés par :

$$n_x^{IS} = 1,4.10^{-9} \text{ m Hz}^{-1/2} \quad n_y^{IS} = 1,8.10^{-9} \text{ m Hz}^{-1/2} \quad n_z^{IS} = 3,0.10^{-9} \text{ m Hz}^{-1/2} \quad (8.20)$$

$$n_\theta^{IS} = 2,0.10^{-7} \text{ rad Hz}^{-1/2} \quad n_\eta^{IS} = 2,0.10^{-7} \text{ rad Hz}^{-1/2} \quad n_\varphi^{IS} = 2,0.10^{-7} \text{ rad Hz}^{-1/2} \quad (8.21)$$

## 8.3 Système d'actuation

### 8.3.1 Micropropulsion du satellite

Pour diriger le satellite, 12 micro-propulseurs sont répartis à l'extérieur du satellite, gérant à la fois les mouvements de translation et de rotation. A ce jour, la technologie naturellement envisagée pour la micropropulsion serait celle embarquée par la mission *LPF*. Elle a été développée et qualifiée pour le spatial dans le cadre de la mission *GAIA* actuellement en vol. Elle est basée sur l'éjection par pulse de gaz froid à haute pression générant des forces de l'ordre de la dizaine de micronewtons. La résultante des forces de translation et rotation appliquées sur le satellite est obtenue par composition des niveaux de propulsion individuels des micropulseurs, ces

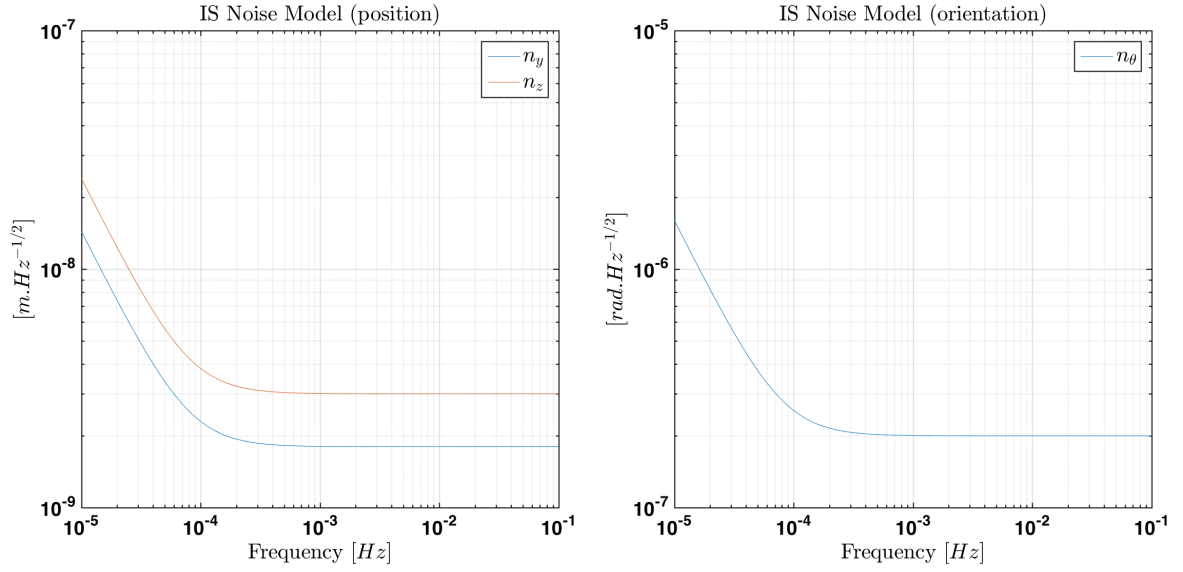


FIGURE 8.6 – Fonction de transfert du modèle de bruit du système de mesure IS. **A gauche :** Niveau de bruit pour la mesure du déplacement des masses d’épreuve suivant les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . **A droite :** Niveau de bruit pour la mesure du déplacement angulaire  $\theta$  des masses d’épreuve (rotation autour de l’axe  $\vec{x}$ ).

derniers étant actifs en permanence par souci de réactivité. Dans la mission *LPF*, une stratégie plus complexe sera mise en oeuvre, utilisant la pression de radiation solaire et un système de seulement 6 micropropulseurs pour contrôler le satellite. Dans ce simulateur, on se concentre pour l’instant sur un design de satellite doté de 12 micropropulseurs.

### Bloc Micropropulsion System

Le système de micropropulsion délivre donc les forces  $F_B^B$  et couples  $T_B^B$  nécessaires au contrôle du satellite. La représentation d’état pour ce système peut rendre compte à la fois des constantes de temps d’établissement de la propulsion, des différents gains et des diaphonies existants entre les différents axes de propulsion et de rotation.

$$A_{MPS} = \left( -\frac{1}{\tau^{MPS}} \right) \mathbb{1}_6 \quad B_{MPS} = -A_{MPS} \quad (8.22)$$

$$C_{MPS} = \mathbb{1}_6 \quad D_{MPS} = \chi^{MPS} \quad (8.23)$$

avec  $\tau^{MPS} = 0,066762s$ . Dans la version standard de *LPF*, les gains sont unitaires et les diaphonies sont négligées ( $\chi^{MPS} = \mathbb{1}_6$ ). Toutefois, leur paramétrisation est rendue directement accessible dans le simulateur.

## Bloc modèle de bruit *Micropropulsion System*

Le modèle de bruit spécifié par *Airbus Defence & Space* est donné individuellement pour chaque micropropulseur. En fonction de la répartition géométrique et de l'orientation des 12 micropropulseurs, on peut retrouver la résultante des forces délivrées suivant les axes  $\vec{e}_{x,B}$ ,  $\vec{e}_{y,B}$  et  $\vec{e}_{z,B}$ . A cet effet, la matrice suivante compose les forces appliquées par chaque micropropulseur :

$$A_{ct} = \begin{bmatrix} -0,126826 & -0,126826 & -0,739199 & -0,739199 & 0,739199 & 0,739199 \\ -0,78033 & -0,78033 & 0,28033 & 0,28033 & 0,28033 & 0,28033 \\ -0,612372 & 0,612372 & 0,612372 & -0,612372 & -0,612372 & 0,612372 \\ -0,26841 & 0,267629 & 0,268159 & -0,267879 & -0,267895 & 0,268176 \\ 0,475926 & -0,475799 & -0,475493 & 0,476232 & -0,487771 & 0,487032 \\ -0,550871 & -0,550871 & 0,541368 & 0,541368 & -0,546669 & -0,546669 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,126826 & 0,126826 & -0,612372 & -0,612372 & 0,612372 & 0,612372 \\ -0,78033 & -0,78033 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,612372 & -0,612372 & -0,612372 & 0,612372 & 0,612372 & -0,612372 \\ 0,26642 & -0,267201 & 0,566419 & -0,565919 & -0,565919 & 0,566418 \\ 0,487339 & -0,487465 & -0,00545 & 0,006062 & 0,00545 & -0,006061 \\ 0,565826 & 0,565826 & -0,570869 & -0,570869 & 0,561469 & 0,561469 \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

où le numéro de colonne correspond au micropropulseur concerné et le numéro de ligne au degré de liberté étudié. Le bruit de chaque micropropulseur est modélisé par la fonction de transfert suivante :

$$F_{MPS} = 1.10^{-7} \frac{(s + 2\pi \times 1.10^{-2})^2}{(s + 2\pi \times 1.10^{-3})^2} \quad (8.25)$$

Pour retrouver le bruit équivalent sur chaque degré de liberté géométrique, on multiplie cette fonction de transfert par la matrice  $A_{ct}$  donnée à l'équation 8.24. Les fonctions de transfert ainsi distribuées sont représentées dans la figure 8.8.

### 8.3.2 Système d'actuation électrostatique (*CAPACT*)

Pour agir sur les autres degrés de liberté des masses d'épreuve, le système capacitif utilisé pour la mesure est également sollicité pour l'application de forces et couples sur les masses. Un déséquilibre approprié des potentiels appliqués sur les électrodes peut générer des forces de translation ou de rotation s'exerçant sur la masse d'épreuve (une discussion plus détaillée du principe d'actuation sera donnée en section 10.4.2). Dans le mode science nominal, aucune force n'est appliquée suivant l'axe  $\vec{x}$  des logements. Ces degrés de liberté sont exclusivement gérés par les micropropulseurs (stratégie dite de Drag-Free, cf. section 8.5) pour prévenir de toutes forces appliquées sur les masses d'épreuve suivant les axes sensible de *LISA*.

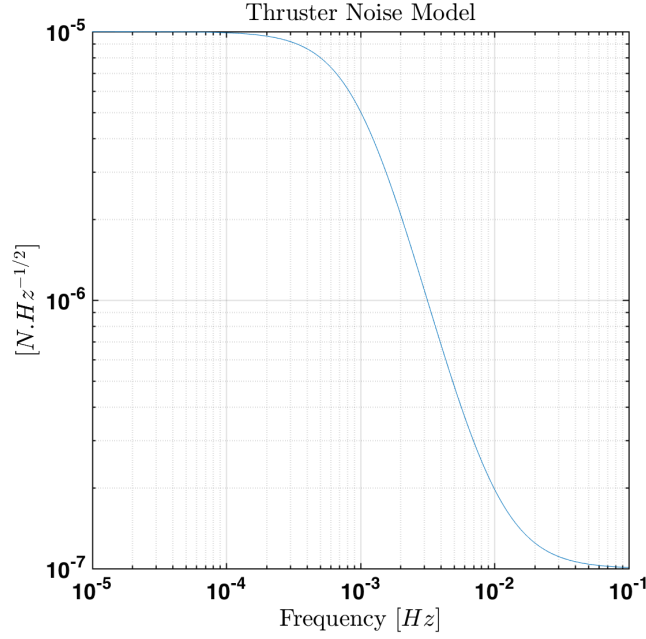


FIGURE 8.7 – Fonction de transfert du modèle de bruit du système d’actuation MPS. Niveau de bruit individuel d’un micropropulseur. Le niveau de bruit équivalent sur chaque axe  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$  et  $\vec{Z}$  est déterminé par projection du niveau de bruit individuel de chacun des douze micropropulseurs.

## Bloc CAPACT

Le système de capacités a donc la gestion des degrés de liberté suivants :  $y_{T/H}^H$ ,  $z_{T/H}^H$ ,  $\theta_{T/H}^H$ ,  $\eta_{T/H}^H$ ,  $\phi_{T/H}^H$ , une nouvelle fois pour les deux masses respectives. Pour ce système, la représentation d’état décrit pour l’instant uniquement les gains et la diaphonie. On note que la matrice de diaphonie joue un rôle particulièrement important ici. On verra par la suite que son influence sur le bruit d’accélération finale peut s’avérer considérable. Il sera donc nécessaire d’y revenir.

$$A_{CAPACT} = 0 \quad B_{CAPACT} = 0 \quad (8.26)$$

$$C_{CAPACT} = 0 \quad D_{CAPACT} = \begin{bmatrix} \chi_{(1-6),(2,4-6)}^{CAPACT} & 0 \\ 0 & \chi_{(1-6),(2-6)}^{CAPACT} \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

Dans ce modèle, seuls les gains statiques et les diaphonies sont inclus. A nouveau, les éléments de diaphonie sont ceux estimés à partir de l’expérience *LPF* [3] :

$$\chi^{CAPACT} = \begin{bmatrix} 1 & 0,0011 & 0,0011 & 0,21739 & 0,21739 & 0,39131 \\ 0,0011 & 1 & 0,0011 & 0,39131 & 0,21739 & 0,21739 \\ 0,0011 & 0,0011 & 1 & 0,21739 & 0,39131 & 0,21739 \\ 4 \cdot 10^{-5} & 4 \cdot 10^{-5} & 4 \cdot 10^{-5} & 1 & 0,005 & 0,005 \\ 4 \cdot 10^{-5} & 4 \cdot 10^{-5} & 4 \cdot 10^{-5} & 0,005 & 1 & 0,005 \\ 4 \cdot 10^{-5} & 4 \cdot 10^{-5} & 4 \cdot 10^{-5} & 0,005 & 0,005 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \text{m}^{-1} \\ \text{m} & \cdot \end{bmatrix} \quad (8.28)$$

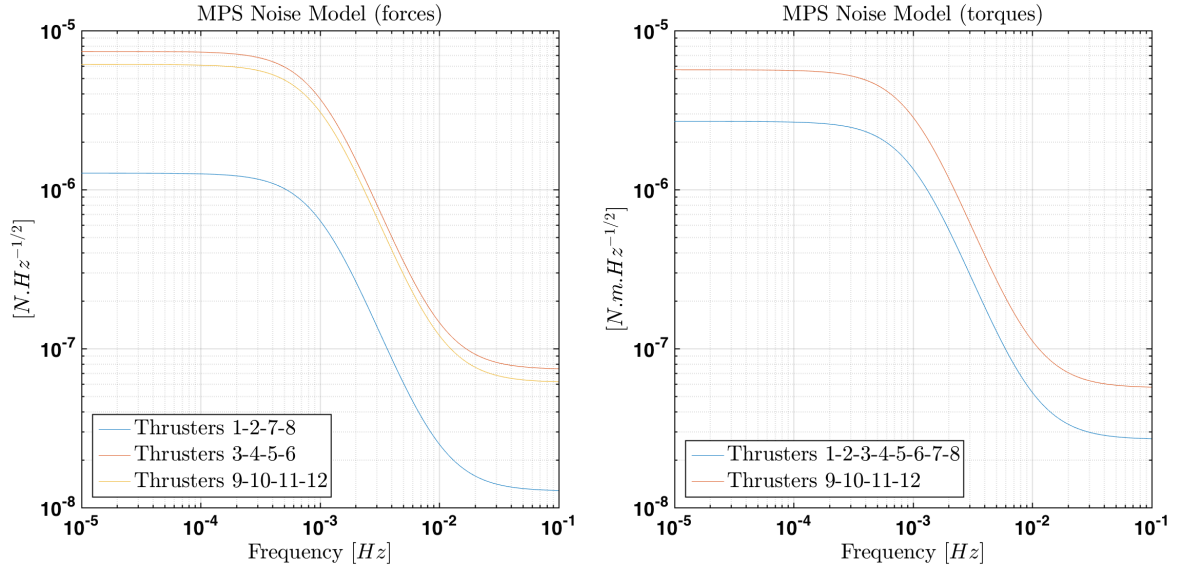


FIGURE 8.8 – **A gauche** : Fonctions de transfert transformant un bruit de propulsion blanc associé à chacun des douze micropropulseurs en un niveau de bruit de force suivant l'axe  $\vec{X}$ . **A droite** : Fonctions de transfert transformant un bruit de propulsion blanc associé à chacun des douze micropropulseurs en un niveau de bruit de couple autour de l'axe  $\vec{X}$

où l'on distingue quatre sous-blocs  $3 \times 3$  d'unités physiques différentes (dont deux sans unité). Les gains statiques de l'actuation capacitive sont encore une fois indiqués dans les termes diagonaux de la matrice et les termes de diaphonie correspondent aux termes croisés. Le terme  $\chi_{14}^{CAPACT}$ , ou  $\chi_{\theta \rightarrow x}^{CAPACT}$ , s'interprète comme la part du couple autour de l'axe  $\vec{x}$ , commandé par le système de contrôle, qui se traduit par une force effective appliquée sur la masse d'épreuve suivant l'axe  $\vec{x}$ , axe qui, par ailleurs, devrait dans l'idéal être préservé de toute force commandée. Dans l'équation 8.27, la matrice  $D_{CAPACT}$  considère les deux masses d'épreuve. L'actuation capacitive n'étant pas utilisée suivant les axes  $\vec{x}_1$ ,  $\vec{z}_1$  et  $\vec{x}_2$ , tous trois axes de *Drag-Free* (cf. section 8.5), on élimine les degrés de liberté numéro 1 et 3 pour la première masse et le degré de liberté numéro 1 pour la seconde par une sélection appropriée des indices de la matrice  $\chi^{CAPACT}$  dans la définition de  $D_{CAPACT}$ .

## Bloc modèle de bruit CAPACT

A nouveau, dans le document *Airbus Defence & Space* [18], on trouve la spécification suivante pour le comportement fréquentiel du bruit du système capacitif :

$$F_{CAPACT} = \frac{(s + 2.10^{-5})(s + 3.10^{-5})(s + 3.10^{-4})}{(s + 2.10^{-6})(s + 5.10^{-6})(s + 1.10^{-5})} \quad (8.29)$$

Les facteurs d'échelle **en unité d'accélération** sont les suivants :



$$da_x = 2, 1.10^{-15} \text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2} \quad (8.30)$$

$$da_y = 3, 0.10^{14} \text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2} \quad (8.31)$$

$$da_z = 3, 0.10^{14} \text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2} \quad (8.32)$$

$$da_\theta = 7, 31.10^{-13} \text{rad s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2} \quad (8.33)$$

$$da_\eta = 7, 31.10^{-13} \text{rad s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2} \quad (8.34)$$

$$da_\varphi = 7, 31.10^{-13} \text{rad s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2} \quad (8.35)$$

On retrouve les équivalents en unités de force de ces facteurs d'échelle en les multipliant respectivement par les masses et tenseurs d'inertie des masses d'épreuve. Les modèles de bruit du système capacitif sont représentés en figure 8.9.

Cette spécification donnée pour le bruit de l'actuation capacitive contient en réalité tout un éventail de forces et couples divers directement appliqués sur les masses d'épreuve. Ainsi, ces fonctions de transfert tiennent compte de la liste des perturbations suivantes :

- Interaction gravitationnelle entre les satellites et les masses d'épreuve
- Effets thermiques (pression de radiation thermique)
- Bruit brownien (choc entre les particules résiduelles et les masses d'épreuve dû à la réalisation d'un vide imparfait dans les compartiments des masses)
- Fluctuation du champ magnétique
- Forces électriques appliquées sur les masses d'épreuve (incluant donc le bruit du système capacitif)
- Charge aléatoire des masses d'épreuve
- Pression de radiation du laser incident

Cependant, on désire distinguer les forces et couples perturbateurs directs, de nature externe au système, et le bruit provenant du système d'actuation. Le document *Airbus Defence & Space* (réf. nécessaire) ne fournissant pas une telle décomposition, on réalise une distinction arbitraire, en remarquant la différence entre le bruit observé suivant l'axe  $\vec{x}$  et les autres axes de translation. En effet, la stratégie de contrôle prévue en mode nominal (cf section 8.5) interdit au système capacitif d'exercer une force de contrôle quelconque suivant l'axe  $\vec{x}$  des compartiments. Cela signifie que les électrodes réparties sur les faces  $X$  dans la figure 8.2.3 ne seront pas activées<sup>1</sup>, éliminant ainsi la source de bruit correspondante suivant cet axe. Le facteur d'échelle  $da_x = 2, 1.10^{-15} \text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2}$  ne trouve son origine que dans les forces directes externes appliquées aux masses d'épreuve et on réalise la décomposition selon cette supposition. Finalement, les facteurs d'échelle deviennent :

---

1. A l'exception des électrodes en charge de l'application des couples autour de l'axe  $\vec{z}$ , également situées sur les faces  $X$ .

$$da_y^{CAPACT} = 2,79.10^{14} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2} \quad (8.36)$$

$$da_z^{CAPACT} = 2,79.10^{14} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2} \quad (8.37)$$

$$da_\theta^{CAPACT} = 7,31.10^{-13} \text{ rad s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2} \quad (8.38)$$

$$da_\eta^{CAPACT} = 7,31.10^{-13} \text{ rad s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2} \quad (8.39)$$

$$da_\varphi^{CAPACT} = 7,31.10^{-13} \text{ rad s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2} \quad (8.40)$$

Les autres perturbations directes seront définies séparément dans la section suivante.

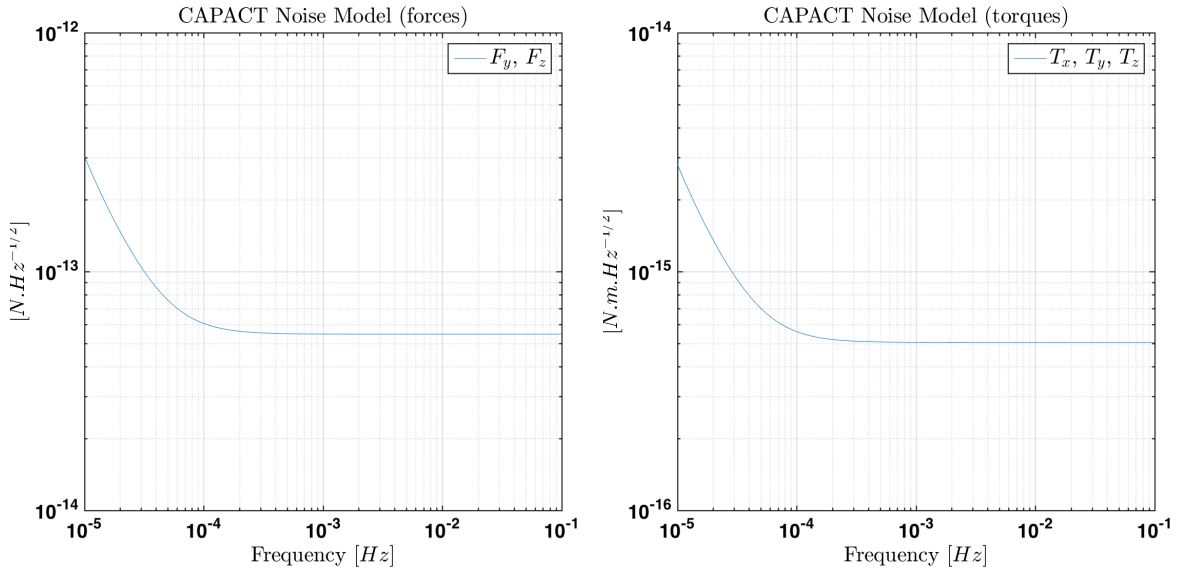


FIGURE 8.9 – Fonction de transfert du modèle de bruit du système d’actuation CAPACT. **A gauche** : Niveau de bruit pour les forces d’actuation suivant les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . **A droite** : Niveau de bruit pour les couples d’actuation autour des axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ .

## 8.4 Perturbations directes sur les variables dynamiques

Pour obtenir les performances requises en terme de bruit d’accélération, les masses d’épreuve sont préservées le plus possible de toutes forces perturbatrices extérieures pouvant les prévenir d’une trajectoire purement géodésique. La présence du satellite, jouant le rôle de bouclier protecteur, et la stratégie de Drag-Free (cf. section 8.5) limitent considérablement ces perturbations. Néanmoins, des forces perturbatrices, essentiellement d’interaction entre le satellite et les masses, interviendront inévitablement faisant des masses d’épreuve des références inertielles imparfaites. Quelques-unes de ces perturbations éventuelles ont été répertoriées dans la section

précédente. Dans la simulation, on distingue 2 types de perturbations directes sur les masses d'épreuve intervenant de manière différente.

### 8.4.1 Forces de perturbation externes

En section 8.3.2 on a déjà énuméré les différentes perturbations externes modélisées s'exerçant sur les masses d'épreuve, les spécifications établies par *Airbus Defence & Space* ne faisant pas la distinction entre les bruits d'origine capacitive et les autres forces de perturbation directes. D'après la décomposition introduite alors, on définit les facteurs d'échelle suivants pour les bruits de perturbations externes :

$$da_x = 2, 1.10^{-15} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2} \quad (8.41)$$

$$da_y = 2, 1.10^{-15} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2} \quad (8.42)$$

$$da_z = 2, 1.10^{-15} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2} \quad (8.43)$$

$$(8.44)$$

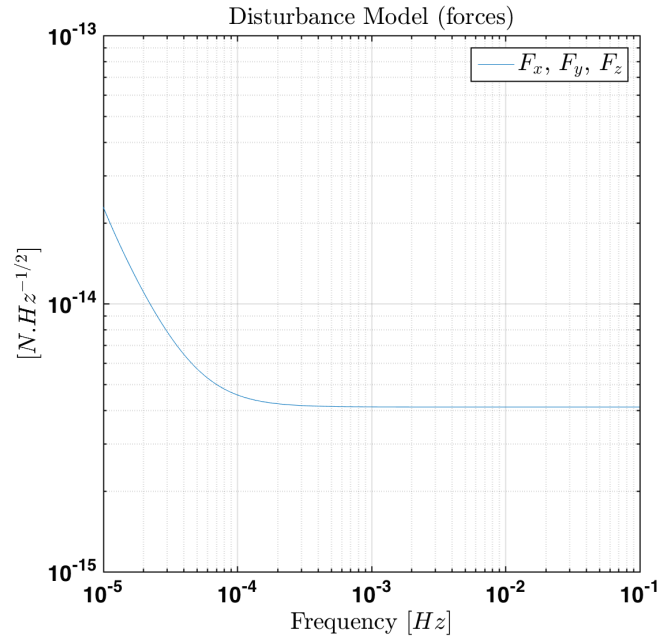


FIGURE 8.10 – Fonctions de transfert du modèle des forces perturbatrices directes s'exerçant sur la masse d'épreuve suivant les axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ .CAPACT.

On n'expose pas ici les bruits angulaires car il est difficile de supposer d'une quelconque décomposition à partir du document de l'industriel. Les perturbations angulaires hors actuation ne sont donc pour l'instant pas distinguées des bruits d'origine capacitive. Les gains des fonctions de transfert sont présentés en figure 8.10.

Les masses d'épreuve seront également soumises à des forces et couples de perturbation continus principalement d'origine gravitationnelle. Le satellite et les masses d'épreuve sont sujets à une interaction gravitationnelle mutuelle constante. Malgré une compensation gravitationnelle réalisée en ajustant la répartition des masses dans le satellite, on estime les niveaux suivants pour ces forces et couples continus [18] :

$$da_x = 8,0 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2} \quad (8.45)$$

$$da_y = 8,0 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2} \quad (8.46)$$

$$da_z = 8,0 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2} \quad (8.47)$$

$$da_\theta = 5,0 \cdot 10^{-9} \text{ rad s}^{-2} \quad (8.48)$$

$$da_\eta = 12,0 \cdot 10^{-9} \text{ rad s}^{-2} \quad (8.49)$$

$$da_\varphi = 5,0 \cdot 10^{-9} \text{ rad s}^{-2} \quad (8.50)$$

## 8.4.2 Forces de rappel

Le second type de forces et couples perturbateurs inclus dans la simulation sont les forces de rappel couplant le mouvement du satellite à celui de la masses d'épreuve. Elles dépendent donc directement de la position et de l'orientation de la masse d'épreuve par rapport au compartiment dans laquelle elle est contenue :

$$\begin{bmatrix} f_T^H \\ t_T^T \end{bmatrix} = \Omega^2 \begin{bmatrix} r_{T/H}^H \\ \alpha_{T/H} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{xx}^2 & \Omega_{xy}^2 & \Omega_{xz}^2 & \Omega_{x\theta}^2 & \Omega_{x\eta}^2 & \Omega_{x\varphi}^2 \\ \Omega_{yx}^2 & \Omega_{yy}^2 & \Omega_{yz}^2 & \Omega_{y\theta}^2 & \Omega_{y\eta}^2 & \Omega_{y\varphi}^2 \\ \Omega_{zx}^2 & \Omega_{zy}^2 & \Omega_{zz}^2 & \Omega_{z\theta}^2 & \Omega_{z\eta}^2 & \Omega_{z\varphi}^2 \\ \Omega_{\theta x}^2 & \Omega_{\theta y}^2 & \Omega_{\theta z}^2 & \Omega_{\theta\theta}^2 & \Omega_{\theta\eta}^2 & \Omega_{\theta\varphi}^2 \\ \Omega_{\eta x}^2 & \Omega_{\eta y}^2 & \Omega_{\eta z}^2 & \Omega_{\eta\theta}^2 & \Omega_{\eta\eta}^2 & \Omega_{\eta\varphi}^2 \\ \Omega_{\varphi x}^2 & \Omega_{\varphi y}^2 & \Omega_{\varphi z}^2 & \Omega_{\varphi\theta}^2 & \Omega_{\varphi\eta}^2 & \Omega_{\varphi\varphi}^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_{T/H}^H \\ y_{T/H}^H \\ z_{T/H}^H \\ \theta_{T/H} \\ \eta_{T/H} \\ \varphi_{T/H} \end{bmatrix} \quad (8.51)$$

Dans le modèle, on introduit donc les forces de raideur dans la matrice d'état  $A$  des équations du mouvement (cf équation 7.9) aux indices de lignes et de colonnes suivants :

$$A_{7:8,5:6} = \Omega^2 \quad (8.52)$$

Ces forces de rappel tiennent principalement leur origine en deux effets distincts de contributions équivalentes :

- Interaction gravitationnelle entre les satellites et les masses d'épreuve
- Les forces de raideur électrostatiques causées par le champ électrique appliqué par les électrodes pour contrôler les masses d'épreuve.

On note que ces forces sont répulsives<sup>2</sup> et tendent à déstabiliser le système. Le terme de force de "rappel" est quelque peu abusif, car c'est bien le contraire qui se produit, la raideur du système encourageant les masses d'épreuve à s'éloigner du centre de leur compartiment respectif. On utilise comme modèle de ces couplages celui du simulateur de *LPF* dont la matrice correspondante est la suivante :

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} 3,793.10^{-6} & 2,492.10^{-7} & 2,492.10^{-7} & 7,846.10^{-10} & 6,665.10^{-9} & 4,705.10^{-9} \\ 2,492.10^{-7} & 5,511.10^{-6} & 2,492.10^{-7} & 6,665.10^{-9} & 7,846.10^{-10} & 2,745.10^{-9} \\ 2,492.10^{-7} & 2,492.10^{-7} & 9,165.10^{-6} & 4,705.10^{-9} & 2,745.10^{-9} & 7,846.10^{-10} \\ 1,698.10^{-9} & 7,5.10^{-9} & 5,148.10^{-9} & 3,771.10^{-9} & 3,906.10^{-11} & 3,906.10^{-11} \\ 7,5.10^{-9} & 1,698.10^{-9} & 3,78.10^{-9} & 3,906.10^{-11} & 3,696.10^{-9} & 3,906.10^{-11} \\ 5,159.10^{-9} & 3,737.10^{-9} & 1,698.10^{-9} & 3,906.10^{-11} & 3,906.10^{-11} & 2,746.10^{-9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{N m}^{-1} & \text{N rad}^{-1} \\ \text{N} & \text{N m rad}^{-1} \end{bmatrix} \quad (8.53)$$

## 8.5 Drag-Free and Attitude Control System (*DFACS*)

Le bloc *DFACS* modélise le système de contrôle nécessaire à la stabilisation de la dynamique. Il constitue le coeur stratégique du système *LTP*. Il prend information de la mesure des variables dynamiques effectuée par interférométrie et par les senseurs inertiels puis, en fonction de son écart aux valeurs de consigne, il détermine les forces et couples à commander pour stabiliser le système et traquer la dynamique de consigne. On rappelle qu'ici la dynamique de consigne est choisie telle que le satellite s'oriente suivant le référentiel de consigne *O* et que les masses d'épreuve soient centrées dans leur logement et alignées avec leur référentiel *H* respectif.

Le *DFACS* peut se manifester sous différents modes. En effet, plusieurs systèmes de senseurs ou d'actuateurs peuvent être utilisés pour respectivement mesurer ou contrôler une même variable dynamique. Comme on a pu le constater dans les sections précédentes, il y a pour certaines variables dynamiques une redondance des voies de mesure et d'actuation. On peut ainsi définir plusieurs modes de fonctionnement pour le *DFACS*. Pour chacun d'eux les voies de mesure et d'actuation sollicitées par le *DFACS* diffèrent. Dans la suite, on se concentre exclusivement sur le mode nominal de fonctionnement du *DFACS* durant la mission, à savoir le mode "*Science*" [17].

### 8.5.1 Stratégie de *Drag-Free*

Dans la section 5.4 du chapitre précédent, on a observé que le mouvement des masses d'épreuve, si rendu strictement libre, ne permet pas d'assurer naturellement leur maintien à l'intérieur des logements. Sans compter que d'éventuelles perturbations externes appliquées sur le satellite ou les masses d'épreuve sont susceptibles de faire dériver ces corps les uns par rapport aux autres. Il est donc indispensable

---

2. Dans le référentiel *H*, c'est-à-dire par rapport au point de consigne.

de contrôler les variables dynamiques des masses d'épreuve durant le vol. Pour cela, on dispose de deux options :

- La première option est de mettre en mouvement le satellite relativement aux masses d'épreuve, à l'aide des micropropulseurs (bloc MPS), de manière à recentrer ces dernières dans leur logement respectif. Cette option est généralement nommée contrôle "Drag-Free". C'est l'option idéale puisque l'on arrive de cette manière à contrôler les variables dynamiques des masses d'épreuve sans jamais leur appliquer de forces directes, les éventuelles raideurs du système mises à part. Cependant, on ne dispose au travers du satellite que de six degrés de liberté, dont trois degrés angulaires sont déjà sollicités par le contrôle d'attitude. Il est primordial de réduire au maximum les forces directes appliquées sur les masses d'épreuve suivant les axes sensibles de *LISA*, c'est-à-dire les axes optiques des liens laser inter-satellites. Les axes où le contrôle en "Drag-Free" prend effet sont donc naturellement les axes  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$  des deux logements contenant les masses d'épreuve. Les variables dynamiques  $x_{T/H1}^{H1}$  et  $x_{T/H2}^{H2}$  seront gérées via ce système de contrôle. Le degré de liberté restant du satellite (suivant  $Z$ ) peut quant à lui être indifféremment utilisé pour contrôler  $z_{T/H1}^{H1}$  ou  $z_{T/H2}^{H2}$ . On choisit arbitrairement  $z_{T/H1}^{H1}$ .
- La seconde option est d'exercer des forces et couples de contrôle sur les masses d'épreuve au travers du système capacitif d'actuation (bloc CAPACT). Ce sous-système de contrôle est appelé contrôle de suspension. Il est utilisé pour tous les autres degrés de liberté des masses d'épreuve. On souligne une nouvelle fois que les variables dynamiques  $x_{T/H1}^{H1}$  et  $x_{T/H2}^{H2}$  sont exclues de ce sous-système de contrôle, réduisant d'autant le bruit d'actuation observé suivant les axes "Drag-Free" du satellite (cf section 8.3.2).

La configuration en triangle équilatéral de *LISA* implique que, pour chaque satellite, les deux axes de "Drag-Free" s'écartent d'un angle de  $60^\circ$ . Cette stratégie de Drag-Free apparaît alors plus complexe dans cette configuration particulière plutôt que dans une configuration où les axes de "Drag-Free" seraient perpendiculaires. En fait, on peut montrer que pour recentrer à la fois les deux masses d'épreuve, une telle stratégie de contrôle suffit en itérant successivement entre une action des micropropulseurs pour recentrer les masses suivant les axes "Drag-Free" et une actuation directe suivant l'axe  $Y$  des masses d'épreuve (en ne considérant dans cette remarque que les mouvements dans le plan  $(B\vec{X}\vec{Y})$  du satellite, cf. figure 5.1).

### 8.5.2 Contrôle d'attitude, Drag-Free et contrôle de suspension

On distingue alors chacune des variables dynamiques du système suivant son mode de contrôle. Le tableau de la figure 8.11 représente un tel classement. Dans ce tableau, on a aussi précisé par intermédiaire de quel système d'actuation les variables dynamiques sont contrôlées.

	Coordinates	Attitude Control	Drag Free Control	Suspension Control	Micropropulsion System	Capacitive System
S/C Orientation	$\Theta_{SC}$	✓			✓	
	$H_{SC}$	✓			✓	
	$\Phi_{SC}$	✓			✓	
TM1 Position	$x_1$		✓		✓	
	$y_1$			✓		✓
	$z_1$		✓		✓	
TM1 Orientation	$\theta_1$			✓		✓
	$\eta_1$			✓		✓
	$\phi_1$			✓		✓
TM2 Position	$x_2$		✓		✓	
	$y_2$			✓		✓
	$z_2$			✓		✓
TM2 Orientation	$\theta_2$			✓		✓
	$\eta_2$			✓		✓
	$\phi_2$			✓		✓

FIGURE 8.11 – Répartition des coordonnées dynamiques du système suivant les trois stratégies de contrôle et les systèmes d'actuation sollicités

Dans la figure 8.12, on examine de plus près les entrées et les sorties du bloc *DFACS* mentionné dans la figure 8.1. On y rend notamment explicite le système de mesure employé, dans le cas du mode "Science", pour le contrôle des variables dynamiques. On souhaite alors souligner qu'un même sous-système de contrôle peut être nourri par des systèmes de mesure de nature différente, impliquant alors des niveaux de bruit distincts pour les différentes variables dynamiques contrôlées. Cette dernière remarque se trouvera importante, car les performances du contrôle dépendent nécessairement du niveau de bruit de la mesure entrante, ce malgré les contraintes de faible sensibilité aux bruits considérées lors du design des contrôleurs.

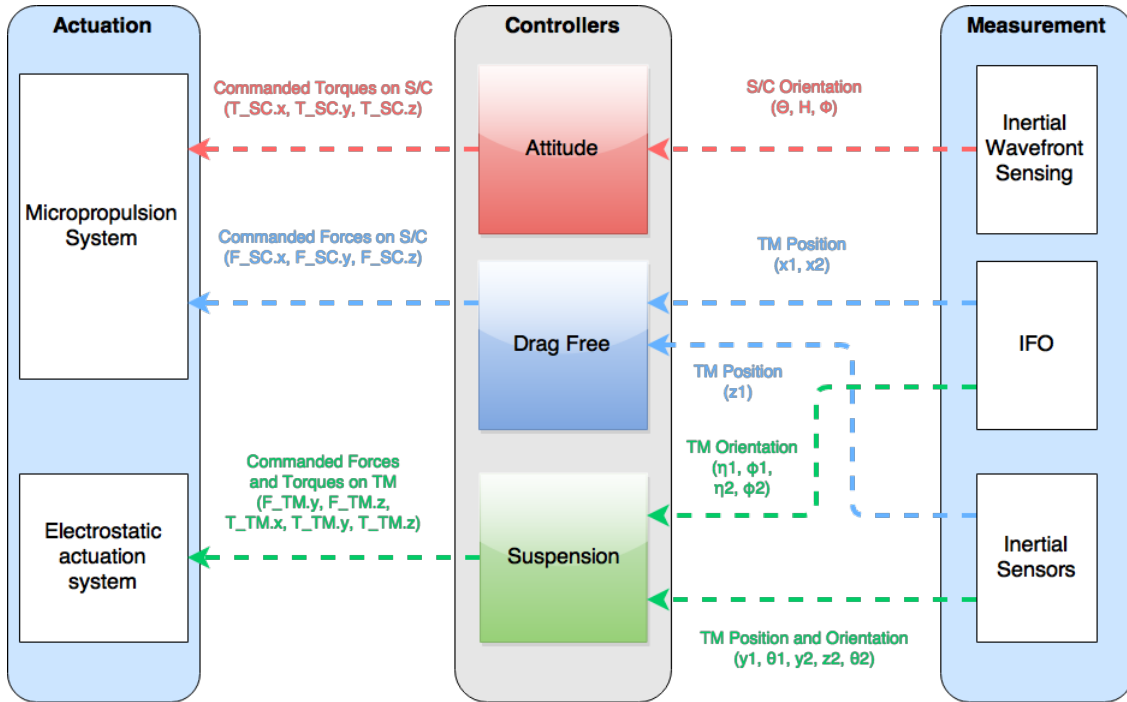


FIGURE 8.12 – Diagramme en bloc détaillé du DFACS illustrant la distribution des degrés de liberté dynamiques du système suivant les systèmes de mesure, les stratégies de contrôle et les systèmes d'actuation.

### 8.5.3 Contrôleurs

Dans les sections précédentes, la stratégie de contrôle adoptée a été décrite. Il reste maintenant à détailler les fonctions de transfert des contrôleurs utilisées. Les contrôleurs embarqués en vol seront issus d'un design industriel approfondi. Outre leur pouvoir de stabiliser le système, ils posséderont par ailleurs des propriétés de robustesse, d'insensibilité aux bruits tout en réduisant les coûts de la commande en terme d'énergie. On parle alors de commande optimale (réf. nécessaire). Ces notions de théorie du contrôle avancé ne seront que brièvement discutées ici.

Dans l'idéal, le simulateur devrait posséder le jeu de contrôleurs effectivement embarqué durant la mission. N'ayant pour l'instant pas accès à ces fonctions de transfert gardées privées par l'industriel, on décide d'utiliser les contrôleurs qui seront embarqués par *LPF* et déjà distribués à la communauté, disponibles notamment au sein du simulateur de *LPF* inclus dans la boîte à outils Matlab *LTPDA* [27]. On s'aide ici du fait que les contrôleurs sont construits pour stabiliser de manière générale tout système dynamique du second ordre, c'est-à-dire soumis à une équation différentielle linéaire du second ordre. En revanche, leur qualité d'optimalité risque éventuellement d'être affectée par leur application dans le cadre de la dynamique de *LISA*, bien qu'ils aient été conçus pour posséder une certaine robustesse. On verra par la suite que, si ces contrôleurs semblent stabiliser le système de manière convenable, leur robustesse apparaît limitée, ce qui se traduit par une forte sensibilité de la commande et des performances du contrôle des variables dynamiques au bruit des senseurs (cf. sections 10.4.1 et 10.2).

#### Matrice de découplage

Le système dynamique étudié possède des entrées et sorties multiples. Ce genre de système est nommé *MIMO*. Il arrive alors que l'action d'une entrée affecte à la fois plusieurs sorties du système. De ce fait, la tâche de construction des contrôleurs est rendue plus complexe, car les forces commandées pour le contrôle d'une variable dynamique en influenceront plusieurs autres. Par exemple, si le satellite est mis en mouvement suivant  $\vec{e}_{x,B}$ , afin de contrôler la position d'une première masse d'épreuve, cela aura également une incidence sur les variables dynamiques  $x_{T/H2}^{H2}$  et  $y_{T/H2}^{H2}$  de la seconde.

Ainsi, pour le design des contrôleurs, on se place généralement dans le cas d'un système dynamique complètement découplé, dont par définition, une entrée n'influence qu'une seule sortie. Pour illustrer cela, on considère les équations du second ordre de la dynamique concernant l'attitude du satellite. Elles s'écrivent de la manière suivante :

$$\ddot{X}_{Att} = B_{Att}^* u \quad (8.54)$$

En introduisant les variables d'entrée intermédiaires  $\eta$  telles que :



$$\eta = B_{Att}^* u \quad (8.55)$$

On obtient l'équation de la dynamique découplée suivante :

$$\ddot{X}_{Att} = \eta \quad (8.56)$$

Les variables d'entrée intermédiaires  $\eta$  sont donc construites par combinaison linéaire des couples réels  $u$ , de sorte que chaque variable de  $\eta$  n'influence exclusivement qu'une seule variable dynamique. Cette stratégie se généralise pour les sous-systèmes de contrôle de Drag-Free et de suspension, en prenant garde à sélectionner correctement les parties de la matrice  $B$  de l'équation d'état 7.2 concernées par le type de contrôle étudié. En pratique, on construit une matrice dite de sélection qui s'applique à la matrice d'entrée  $B$  :

$$B_{Att}^* = S_{Att} B^* \quad (8.57)$$

$$B_{DF}^* = S_{DF} B^* \quad (8.58)$$

$$B_{Sus}^* = S_{Sus} B^* \quad (8.59)$$

Les contrôleurs fournis par *Airbus Defence & Space* sont donc construits pour commander les variables de sortie intermédiaires  $\eta$  (on se place cette fois-ci du point de vue des contrôleurs). Il faut donc transformer ces variables à nouveau pour retrouver les forces et couples physiques à commander :

$$u_{Att} = (S_{Att} B^*)^{-1} \eta_{Att} \quad (8.60)$$

On introduit alors la matrice de fonction de transfert  $K$  représentant les contrôleurs. Cette matrice se décompose en 3 sous-matrices, une pour chaque sous-système de contrôle :  $K_{Att}$ ,  $K_{DF}$ ,  $K_{Sus}$ . Par définition, on a :

$$\eta_{Att} = K_{Att} Y \quad (8.61)$$

$$\eta_{DF} = K_{DF} Y \quad (8.62)$$

$$\eta_{Sus} = K_{Sus} Y \quad (8.63)$$

D'après l'équation 8.60, on construit finalement les contrôleurs comme :

$$K'_{Att} = (S_{Att} B^*)^{-1} K_{Att} \quad (8.64)$$

$$K'_{DF} = (S_{DF} B^*)^{-1} K_{DF} \quad (8.65)$$

$$K'_{Sus} = (S_{Sus} B^*)^{-1} K_{Sus} \quad (8.66)$$

Par ailleurs, on remarque alors que les contrôleurs fournis par *Airbus Defence & Space* sont construits pour stabiliser n'importe quel système dynamique pouvant se mettre sous la forme de l'équation 8.56.

## Les contrôleurs de LPF

La stratégie de contrôle prévue pour *LPF* diffère sensiblement de celle de *LISA*, bien que les systèmes dynamiques soient très similaires. Ainsi, une variable dynamique de même nature, comme la position en  $\vec{x}$  de la masse d'épreuve n°2  $x_{T/H2}^{H2}$  sera contrôlée en suspension dans *LPF*<sup>3</sup> quand elle sera en Drag-Free pour *LISA*. De plus, les exigences en terme de performances du contrôle d'attitude sont nettement plus importantes dans le cadre de *LISA* que dans celui de *LPF*. Ces exigences renforcées ont pour but de réduire le bruit de phase induit par l'agitation angulaire du satellite qui se répercute directement sur l'angle d'incidence du front d'onde sur le photodétecteur.

Le tableau en figure 8.13 représente les différents modes de contrôle associés aux variables dynamiques de *LPF*. On constate que, dans le cas de *LPF* et à la différence de *LISA*, on a 6 coordonnées gérées par la stratégie de Drag-Free et 6 autres par le contrôle de suspension [35].

	Coordinates	Attitude Control	Drag Free	Suspension Control
S/C Orientation	$\Theta_{SC}$	✓		
	$H_{SC}$	✓		
	$\Phi_{SC}$	✓		
TM1 Position	$x_1$		✓	
	$y_1$		✓	
	$z_1$		✓	
TM1 Orientation	$\theta_1$		✓	
	$\eta_1$			✓
	$\phi_1$			✓
TM2 Position	$x_{12}$			✓
	$y_2$		✓	
	$z_2$		✓	
TM2 Orientation	$\theta_2$			✓
	$\eta_2$			✓
	$\phi_2$			✓

FIGURE 8.13 – Répartition des coordonnées dynamiques suivant les trois stratégies de contrôle dans le cas de l'expérience *LPF* [35]

Ainsi, dans un premier temps, afin d'utiliser les contrôleurs construits pour la mission *LPF* dans le cadre du simulateur *LISA*, on les redistribue en fonction des coordonnées dynamiques de *LISA* de la manière suivante :

- En tant que contrôleur de l'attitude du satellite chez *LISA*, on choisit les contrôleurs associés aux variables  $y_1$ ,  $y_2$  et  $z_2$  dans *LPF*, toutes trois coordonnées de Drag-Free.

3. Dans *LPF*, il s'agit plus précisément la variable différentielle  $x_{12}$ , donnant la distance relative entre les deux masses d'épreuve.

- Les contrôleurs associés aux coordonnées de Drag-Free  $x_1$ ,  $x_2$  et  $z_1$  dans *LISA* sont construits à partir des contrôleurs *LPF* correspondant respectivement aux variables  $x_1$ ,  $x_1$  et  $z_1$ , également coordonnées de Drag-Free dans *LPF*.
- Les contrôleurs associés aux coordonnées de Suspension  $y_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ ,  $\theta_2$ ,  $\eta_2$  et  $\varphi_2$  dans *LISA* sont construits à partir des contrôleurs *LPF* correspondant respectivement aux variables  $x_2$ ,  $\theta_2$ ,  $\eta_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $x_2$ ,  $x_2$ ,  $\theta_2$ ,  $\eta_2$  et  $\varphi_2$  également coordonnées de Suspension dans *LPF*.

## Fonctions de transfert

On expose ici les fonctions de transfert des contrôleurs finalement utilisés, construits à partir de ceux de *LPF* et après application des matrices de composition définies à l'équation 8.66. Les 4 figures suivantes représentent respectivement les fonctions de transfert des contrôleurs de l'attitude du satellite, de Drag-Free et de suspension, ces derniers étant représentés sur deux figures afin de distinguer les variables linéaires des variables angulaires. Sur chaque figure, on présente uniquement la diagonale de la fonction transfert *glsmimo* des contrôleurs, c'est-à-dire le rapport entre la force commandée suivant un degré de liberté dynamique et la mesure, en entrée du *DFACS*, de ce même degré de liberté.

## 8.6 Assemblage des sous-modules

L'ensemble des sous-modules présentés jusqu'ici ont été implémentés sous MATLAB. En fait, chacun d'eux possède sa fonction MATLAB qui lui est propre. Ces fonctions associent chaque sous-module à un modèle en représentation d'état, ce qui se résume numériquement à un simple jeu de quatre matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .

Une boîte à outils particulière de MATLAB, nommée "*Control System Toolbox*", met à disposition un ensemble de classes permettant une manipulation commode de ces modèles. En outre, la classe MATLAB `ss()` permet de disposer facilement des modèles en représentation d'état, d'une part en stockant les 4 matrices de la représentation au sein d'une seule variable, mais surtout en attribuant un nom à chaque port d'entrée et de sortie ainsi qu'aux variables d'état. Cette boîte à outils propose également un certain nombre de fonctions très utiles pour construire les connexions entre chaque sous-module. Par exemple, la fonction `connect(sys1, sys2, inputs, outputs)` permet de connecter les deux modèles `sys1` et `sys2` et de les rassembler en un seul modèle dont les entrées sont les variables `inputs` et les sorties sont les variables `outputs`. Toutes les sorties de `sys1` et les entrées de `sys2` non-répertoriées dans les variables `inputs` et `outputs` en argument de la fonction sont utilisées pour établir la connexion. Lorsque certains ports d'entrée et de sortie des systèmes `sys1` et `sys2` correspondent, et que ces derniers ne sont pas inclus dans les entrées et sorties du système global, on fabrique alors avec la méthode `connect(sys1, sys2, inputs, outputs)` un système en boucle fermée. C'est de cette manière que l'on procède à l'assemblage

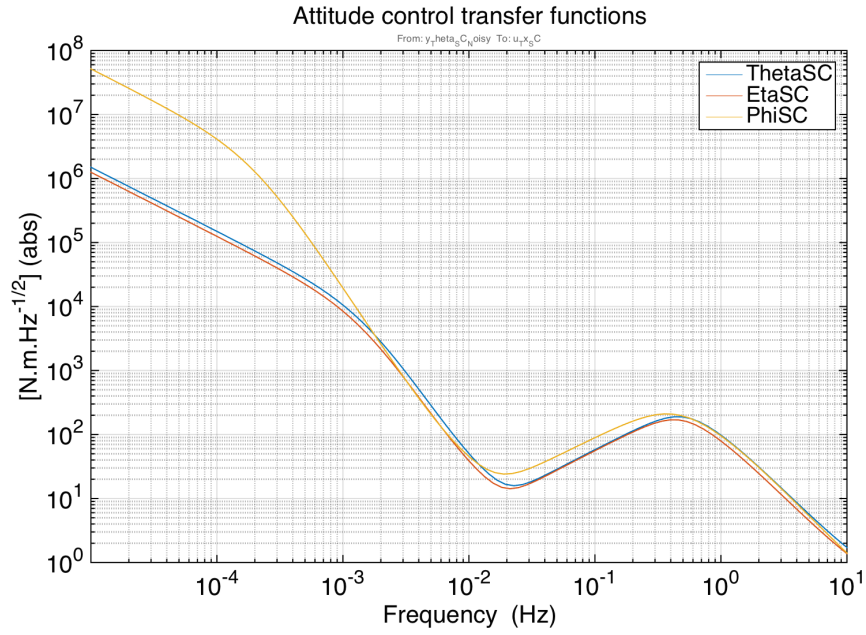


FIGURE 8.14 – Gain des fonctions de transfert  $K'_{Att}$  des contrôleurs d'attitude du satellite. Elles transforment les mesures angulaires  $\Theta^{obs}$ ,  $H^{obs}$  et  $\Phi^{obs}$  en couples commandés et réalisés par le système de micropropulsion du satellite

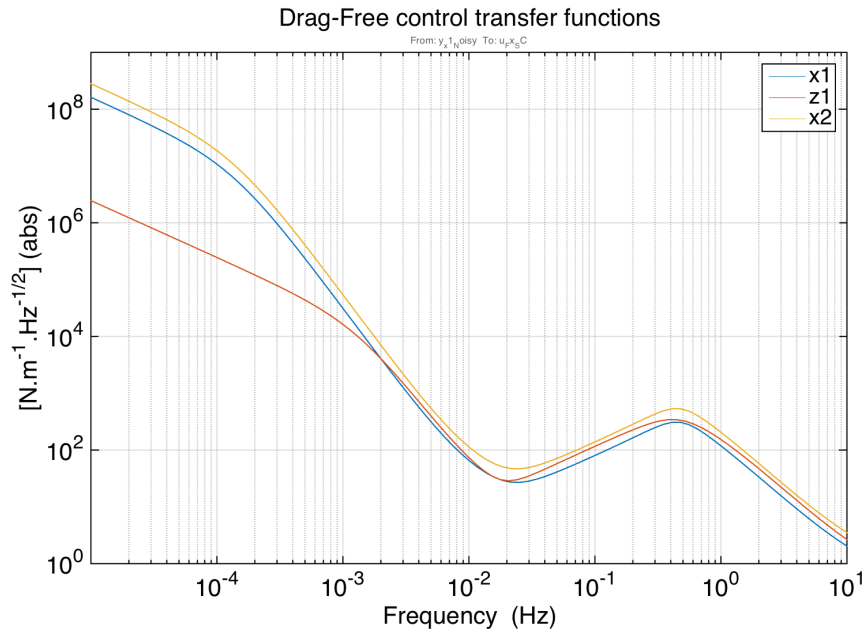


FIGURE 8.15 – Gain des fonctions de transfert  $K'_{DF}$  des contrôleurs Drag-Free. Elles transforment les mesures de déplacement interférométrique  $x_1^{obs}$  et  $x_2^{obs}$  et électrostatiques  $z_1^{obs}$  des masses d'épreuve en forces commandées au système de micropropulsion du satellite

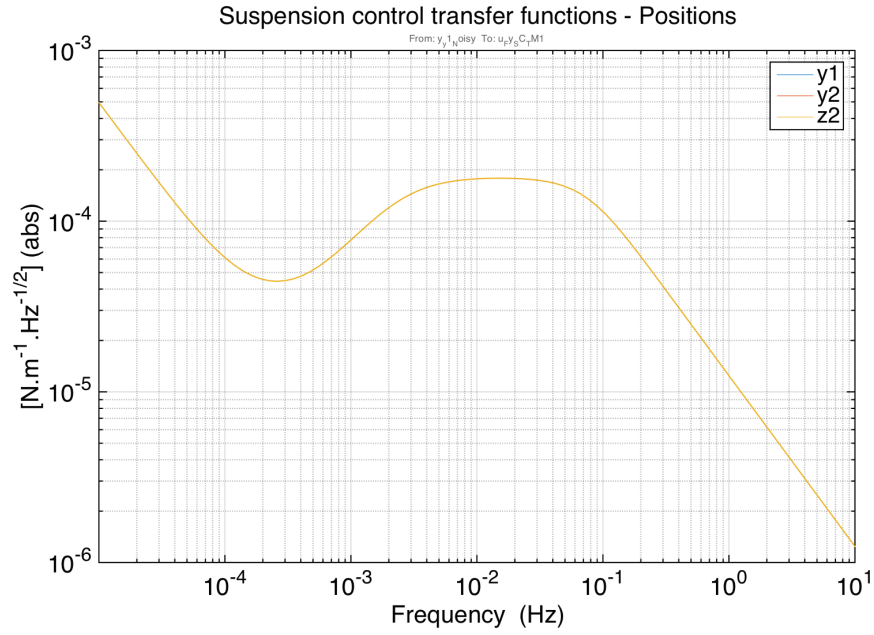


FIGURE 8.16 – Gain des fonctions de transfert  $K'_{S_{us}}$  des contrôleurs Suspension. Elles transforment les mesures de déplacement linéaire  $y_1^{obs}$ ,  $y_2^{obs}$  et  $z_2^{obs}$  des masses d'épreuve en forces commandées au système d'actuation capacitive

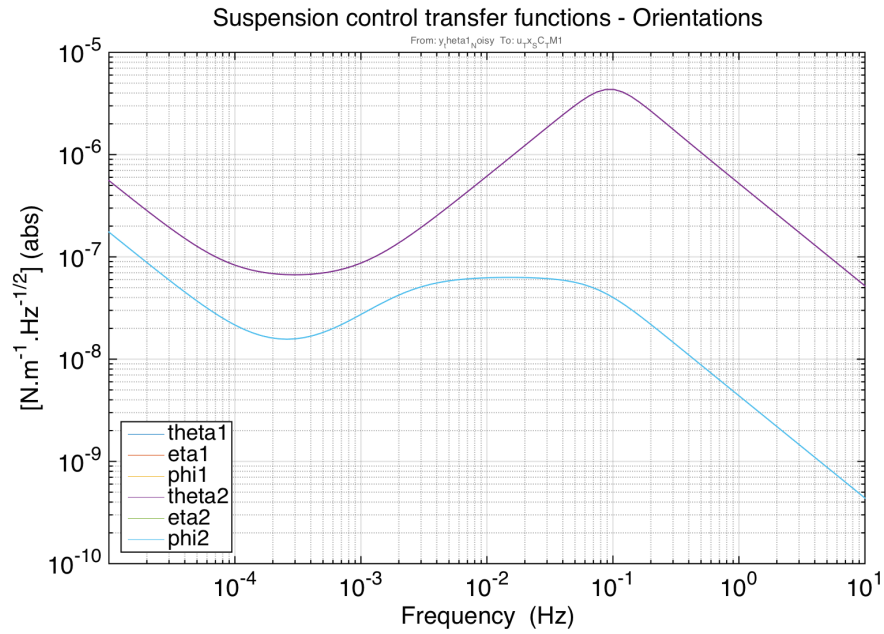


FIGURE 8.17 – Gain des fonctions de transfert  $K'_{S_{us}}$  des contrôleurs Suspension. Elles transforment les mesures de déplacement angulaire  $\theta^{obs}$ ,  $\eta^{obs}$  et  $\varphi^{obs}$  des masses d'épreuve en couples commandés au système d'actuation capacitive

des modules du diagramme en bloc de la figure 8.1 et que l'on construit la boucle de rétroaction.

Au final, on obtient un modèle en représentation d'état du système global en boucle fermée comprenant :

- Au minimum 15 sorties correspondant aux mesures bruitées des variables dynamiques. Cependant, on est éventuellement amené par la suite à récupérer les forces et couples appliqués sur les trois corps du système. Dans ce cas, on aura 45 sorties pour ce modèle.
- On a typiquement 69 entrées. On y compte les différents signaux de bruit blanc qui seront délivrés en entrée des modèles de bruit. Les forces et couples perturbateurs à appliquer directement sur les trois corps sont également introduits de cette manière.
- Enfin , le modèle complet contient 198 variables d'état, correspondant respectivement à chacune des variables d'état des différents modules du simulateur (provenant en majorité du modèle dynamique et des contrôleurs).

Par l'intermédiaire de la classe `ss()` , on regroupe les différents index des entrées et des sorties par groupe. La figure suivante présente la distribution des index de ces entrées et sorties ainsi que leur regroupement tel qu'affiché par MATLAB.

Input groups:	
Name	Channels
Dist	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30
Noise	31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69
FEEPS_Noise	31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42
CAPACT_Noise	43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54
IFO_Noise	58,59,60,61,62,63
IS_Noise	64,65,66,67,68,69
Output groups:	
Name	Channels
NoisyMeasurement	1,2,3,4,8,9,10,14,15,5,6,7,11,12,13
AppliedForcesAndTorques	16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45

FIGURE 8.18 – La classe `ss()` permet une représentation commode d'un modèle dynamique en classant les entrées et sorties par groupe pour faciliter les connexions entre modèles.

## 8.7 Réponse temporelle du système en boucle fermée

Pour estimer la réponse du système, on utilise également une méthode offerte par la *"Control System Toolbox"*, nommée `lsim()`, s'appliquant notamment aux objets de type `ss()`. On note qu'estimer la réponse temporelle du système revient à résoudre numériquement l'ensemble des équations différentielles sous-jacentes à la représentation d'état `ss()` du système. Pour les systèmes continus, ce qui est le cas ici, la résolution numérique est effectuée par discrétisation du système. La discrétisation d'un système linéaire et stationnaire a été donnée à l'équation 7.15, que l'on réécrit en posant  $X(t) \rightarrow X[k]$  avec  $t = kdt$  :

$$\vec{X}[k+1] = e^{A^*dt} \vec{X}[k] + e^{A^*(k+1)dt} \int_{kdt}^{(k+1)dt} e^{A^*(-\tau)} B^* \vec{u}(\tau) d\tau \quad (8.67)$$

Cette opération de discrétisation est effectuée par la méthode `lsim` qui offre plusieurs options d'intégration pour l'expression  $\int_{kdt}^{(k+1)dt} e^{A^*(-\tau)} B^* \vec{u}(\tau) d\tau$ . Par exemple, deux d'entre elles, les options '*Zero Order Hold*' et '*First Order Hold*', approchent le comportement du vecteur d'entrée entre les échantillons  $k$  et  $k+1$  par une constante ou une droite (interpolation par un polynôme d'ordre 0 ou d'ordre 1), ce qui a pour avantage de rendre l'intégrale calculable analytiquement. En particulier, si les entrées possèdent effectivement de telles propriétés de constance ou de linéarité par morceaux, la solution donnée par `lsim` est alors analytique. Par défaut, `lsim` utilise l'option '*Zero Order Hold*'. La discrétisation du système est alors la suivante :

$$\vec{X}[k+1] = A_d \vec{X}[k] + B_d \vec{u}[k] \quad (8.68)$$

avec  $A_d$  et  $B_d$  les matrices de représentation d'état du système discret :

$$A_d = e^{A^*dt} \quad B_d = A^{*-1} (e^{A^*dt} - \mathbb{1}) B^* \quad (8.69)$$

Pour les simulations à venir, on considérera les entrées constantes entre deux échantillons. On considérera une fréquence d'échantillonnage de 10Hz, cadence prévue pour le *DFACS* durant la mission.

## 8.8 Déroulement d'une simulation

Dans cette section, on résume toutes les étapes qui se succèdent lors d'une simulation, en détaillant les différents scripts et fonctions MATLAB impliqués. On distingue d'abord 3 types de simulation :

- Une exécution longue du simulateur opérée par le script appelé `LongRun.m`. Cette exécution est typiquement appropriée pour des temps de simulation  $T \approx 10^6 s$  (de l'ordre de la semaine). Etant donné la taille des vecteurs impliqués dans une simulation d'une durée  $T = 10^6 s$  à une fréquence d'échantillonnage  $f_s = 10\text{Hz}$ , la simulation est décomposée en séquence, le vecteur d'état obtenu en fin d'une séquence donnée étant transmis comme conditions initiales de la séquence suivante. Ceci permet de contourner les problèmes de mémoire vive que rencontre MATLAB lorsque le logiciel est amené à gérer des tableaux de plus d'un million d'entrées. Un seul satellite est généralement considéré lors de cette exécution. Le script principal affecte, trace et sauvegarde la plupart des variables principales mises en jeu par le simulateur, comme par exemple les variables d'état dynamiques du satellite et des

masses d'épreuve durant toute la simulation. Cette exécution est essentiellement utilisée pour tester le simulateur.

- Une seconde exécution longue similaire dont l'objectif est cette fois-ci la production de données. Le script principal associé est `LongRun_LisaCode.m`. L'affectation et la sauvegarde de variables sont rendues minimales et aucune courbe n'est tracée. Ces contraintes permettent d'exécuter le simulateur pour une durée typique  $T \approx 4.10^7 s$  (un peu plus d'un an) pour une fréquence d'échantillonnage  $f_s = 10\text{Hz}$ . Les trois satellites sont considérés dans cette simulation, de manière indépendante toutefois.
- Un troisième type d'exécution est implémenté pour l'étude de la composition des imperfections et bruits individuels de chaque module de mesure et d'actuation sur le bruit d'accélération final appliqué sur les masses d'épreuve. Elle permet d'étudier qualitativement le niveau d'impact d'un bruit sur les performances finales du système. Cette étude est une des contributions essentielles de ce travail de simulation. D'une part, elle est source d'information sur l'interaction de tous les sous-systèmes au sein de la boucle de rétroaction. A terme, elle peut participer à l'identification des perfectionnements éventuellement nécessaires à l'atteinte des objectifs scientifiques d'*eLISA*. On rappelle que cette décomposition de l'influence des bruits et des imperfections n'est rendu possible que pour un système linéaire en invoquant le principe de superposition.

Dans chaque cas, les accélérations auxquelles sont soumises les deux masses d'épreuve d'un satellite sont calculées en post-traitement. La méthode utilisée pour l'estimation des accélérations est présentée au chapitre suivant.



# Chapitre 9

## Le bruit d'accélération

Pour détecter la variation de chemin optique que parcourt le laser entre la masse d'épreuve locale et la masse d'épreuve distante, trois mesures sont mises en oeuvre. Un premier interféromètre est dédié à la mesure de variation de phase du signal lumineux entre les deux bancs optiques distants, cette fluctuation étant largement dominée par l'agitation des satellites. La mesure du déplacement des masses d'épreuve au sein de chaque satellite est justement réalisée pour soustraire la contribution due au mouvement relatif des satellites. Si les masses d'épreuve sont parfaitement libres, c'est-à-dire qu'elles ne subissent aucune accélération, la somme des déplacements suivant l'axe optique entre un premier satellite et sa masse de référence, entre le premier satellite et le second, puis entre le second et sa masse de référence donne accès à la variation de distance relative entre deux corps de référence en chute libre. Une telle mesure est l'objectif de tout détecteur spatial d'ondes gravitationnelles.

Bien sûr, cette mesure est entachée d'éventuelles accélérations que subissent les masses d'épreuve. Ce bruit d'accélération imite les effets d'une onde gravitationnelle sur la mesure et affecte essentiellement les basses fréquences. Le présent simulateur a pour objectif principal d'estimer ce bruit d'accélération, d'en identifier les origines dominantes, de proposer des éventuelles améliorations et d'étudier son comportement pour diverses configurations du détecteur.

### 9.1 Estimation de l'accélération subie par les masses d'épreuve

#### 9.1.1 Calcul de l'accélération à partir des variables d'état du système

Le simulateur peut fournir pour chaque satellite l'évolution temporelle de chacune des variables dynamiques du système, en plus des observations en sortie du système. On peut ainsi déterminer à chaque instant, d'une part la position du satellite par

rapport au référentiel de consigne  $O$ , et d'autre part la position des masses d'épreuve dans leur logement respectif. Or l'accélération absolue des masses d'épreuve peut être donnée par :

$$\vec{a}_{T/O} = \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_{T/O})_J \quad (9.1)$$

Puisque l'origine du référentiel  $O$  suit une trajectoire géodésique, son mouvement de translation est donc inertiel et l'accélération de la masse d'épreuve relativement à ce référentiel révèle bien l'accélération absolue de la masse d'épreuve. On préfère ici évaluer l'accélération des masses d'épreuve relativement à  $O$  plutôt qu'à  $J$  afin d'éviter des problèmes de précision numérique pouvant intervenir lorsque l'on manipule la distance entre la masse d'épreuve et le Soleil. Cependant, l'attitude du référentiel  $O$  lui confère un caractère non-inertiel, car ce dernier est en rotation par rapport au référentiel galiléen  $J$ . On préfère donc exprimer cette accélération dans la base de vecteurs associée à  $J$  :

$$a_{T/O}^J = \ddot{r}_{T/O}^J \quad (9.2)$$

Cette quantité peut s'interpréter comme l'accélération subie par une masse d'épreuve par rapport à un corps dont le centre des masses  $O$  suit une trajectoire géodésique. Néanmoins, à un instant donné, la masse d'épreuve en question se trouve sur une trajectoire géodésique qui diffère de celle du corps en  $O$ , induisant une accélération apparente entre les deux corps due en réalité à une dérive orbitale d'origine gravitationnelle<sup>1</sup> (cf. section 5.4). Il est ainsi nécessaire de retrancher cette dernière contribution à l'accélération en utilisant comme en section ?? un modèle au premier ordre de la différence de forces gravitationnelles subies par les deux corps.

$$a_{T/O'}^J = \ddot{r}_{T/O}^J - \Delta f_{grav,T/O}^J \quad (9.3)$$

Dans cette équation on a introduit un nouveau référentiel  $O'$  qui n'est autre que le référentiel inertiel local du satellite. En réalité, il représente l'ensemble des référentiels inertiels instantanés dont la position et la vitesse de l'origine coïncident avec celles de  $B$ , centre des masses du satellite, à chaque instant  $t$ .

En introduisant l'accélération du satellite par rapport à  $O$  pour décomposer le mouvement de la masse d'épreuve en fonction des variables dynamiques fournies par le simulateur, on trouve :

$$a_{T/O'}^J = \ddot{r}_{B/O}^J + \ddot{r}_{T/H}^J - \Delta f_{grav,T/O}^J \quad (9.4)$$

En introduisant dans l'équation 9.4 les variables d'état dynamiques du système, on obtient finalement :

---

1. On parle de déviation géodésique en relativité générale.

$$a_{T/O'}^J = \frac{d^2}{dt^2} (T_J^O x_1 + T_J^H x_5) - \Delta f_{grav, T/O}^J \quad (9.5)$$

$x_1$  et  $x_5$  étant respectivement la première et cinquième composante du vecteur d'état dynamique  $\vec{X}$  du système.

### 9.1.2 Calcul de l'accélération à partir des forces appliquées

Lors de la rédaction de ce manuscrit, on s'est aperçu que le simulateur pouvait directement donner accès aux forces et couples effectivement appliqués aux masses d'épreuve, aussi bien dues à la commande qu'aux diverses imperfections du système. En fait, les différents modules du simulateur peuvent être assemblés de sorte que le système global en boucle fermée fournisse en sortie non seulement la mesure des variables dynamiques mais également les forces et couples agissant sur ces variables. A une exception près néanmoins, car les forces de raideur entre le satellite et les masses ne sont pas décrites au sein du vecteur d'entrée du bloc *EOM*, mais interviennent directement dans la matrice d'état  $A$  des équations de mouvement. Il faut donc ajouter ces dernières aux forces et couples donnés en sortie du simulateur.

$$a_{T/O'}^J = \frac{T_H^J f_T^H}{m_T} + \begin{bmatrix} \Omega_{xx}^2 & \Omega_{xy}^2 & \Omega_{xz}^2 & \Omega_{x\theta}^2 & \Omega_{x\eta}^2 & \Omega_{x\varphi}^2 \\ \Omega_{yx}^2 & \Omega_{yy}^2 & \Omega_{yz}^2 & \Omega_{y\theta}^2 & \Omega_{y\eta}^2 & \Omega_{y\varphi}^2 \\ \Omega_{zx}^2 & \Omega_{zy}^2 & \Omega_{zz}^2 & \Omega_{z\theta}^2 & \Omega_{z\eta}^2 & \Omega_{z\varphi}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_{T/H}^H \\ \alpha_{T/H} \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

Grâce à cette méthode plus directe, on s'épargne plusieurs calculs intermédiaires pouvant affecter la précision numérique de l'estimation. Par exemple, on n'est en aucun cas amené à calculer des dérivées numériques ou à comparer des variables d'ordre de grandeur différent, comme cela peut être le cas avec la méthode précédente<sup>2</sup>. Néanmoins, on décide de maintenir également la première méthode d'estimation dans la discussion, qui a le mérite de constituer une interprétation physique plus détaillée de ce bruit d'accélération. Par la suite, dans les divers résultats présentés, on utilise l'expression de l'accélération de l'équation 9.6.

## 9.2 Projection de l'accélération sur l'axe sensible

La mesure du déplacement des masses d'épreuve est effectuée pour déterminer le déplacement du satellite à soustraire dans la variation de chemin optique entre les deux bancs distants. En particulier, on souhaite déterminer l'accélération du satellite suivant l'axe optique du lien laser, que l'on appelle *axe sensible*, afin d'éliminer sa contribution à la fluctuation de phase mesurée. Cette composante d'intérêt de

---

2. A l'équation 9.5, le déplacement linéaire du satellite  $x_1$  par rapport au référentiel  $O$  est en général bien plus important (de plusieurs ordres de grandeur) que le déplacement  $x_5$  de la masse d'épreuve par rapport au satellite.

l'accélération du satellite doit alors être estimée par projection du déplacement des masses d'épreuve suivant l'axe sensible.

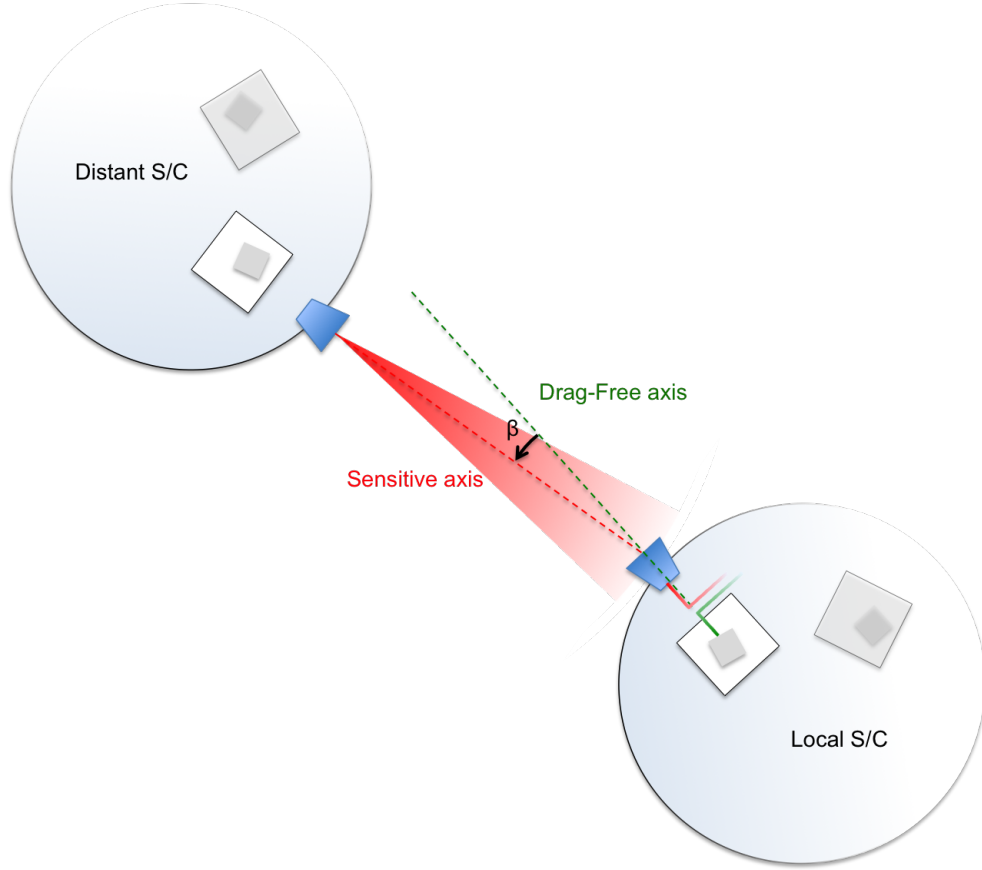


FIGURE 9.1 – L'alignement imparfait des télescopes distants implique une discordance entre axe sensible et axe Drag-Free.

Les masses d'épreuve ne sont repérées par les différents senseurs que suivant trois axes, à savoir les axes  $\vec{e}_{x,H}$ ,  $\vec{e}_{y,H}$  et  $\vec{e}_{z,H}$ , perpendiculaires aux parois des compartiments les contenant. Cependant, le système de mesure d'attitude DWS, mentionné en section 8.2.1, estime justement l'orientation des ces axes par rapport à l'axe optique du faisceau laser distant incident. Renseigné de cette information, on pourrait alors projeter à chaque instant le déplacement mesuré de la masse d'épreuve sur la direction de l'axe sensible estimée via le système de détermination d'attitude DWS. Néanmoins, comme évoqué précédemment, les masses d'épreuve constituent des corps de référence imparfaits et sont inévitablement soumises à un bruit d'accélération. La projection de ce bruit d'accélération suivant l'axe sensible affecte directement la mesure de la variation de phase entre les bancs optiques.

Il reste donc à projeter l'expression du bruit d'accélération dégagée dans la section précédente dans la direction de l'axe sensible. Dans l'analyse, cette direction est construite comme la ligne joignant le centre de la masse d'épreuve du satellite

local local, objet de la simulation, vers le centre de la masse d'épreuve du satellite distant, laquelle est supposée suivre une trajectoire purement géodésique. Cette approximation se justifie par le fait qu'une déviation du mouvement géodésique initial de la masse d'épreuve distante influence faiblement l'orientation de l'axe sensible, au vu de la distance d'un million de kilomètres séparant les deux masses d'épreuve aux deux extrémités du lien laser. On écrit alors cet axe sensible de la manière suivante :

$$\vec{e}_{12} = \frac{\vec{r}_{T2^*/O1} - \vec{r}_{T1/O1}}{\|\vec{r}_{T2^*/O1} - \vec{r}_{T1/O1}\|} \quad (9.7)$$

où l'on mentionne par une astérisque le fait que la trajectoire de la masse d'épreuve numéro 2 du satellite distant est idéalisée, et où l'on définit les positions en référence au point  $O$ , et non pas  $J$ , pour éviter de manipuler des quantités numériques trop importantes.

Finalement, la projection de l'accélération sur l'axe sensible est donnée par :

$$a_{noise} = \vec{a}_{T/O'} \cdot \vec{e}_{12} \quad (9.8)$$

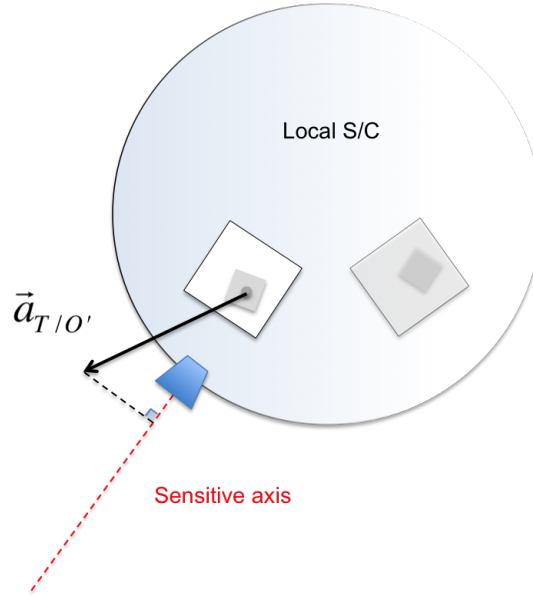


FIGURE 9.2 – L'accélération de la masse d'épreuve est projetée suivant l'axe sensible. Bien que cela ne soit pas explicite dans la figure, on distingue bien l'axe sensible de l'axe Drag-Free dans la projection géométrique. Le choix entre ces deux axes de projection est possible et paramétré dans le simulateur.

### 9.3 Spectre du bruit d'accélération

L'objectif est d'étudier le comportement spectral de ce bruit d'accélération. En fonction des différentes configurations du simulateur, c'est-à-dire des modules de

bruit ou d'imperfections activés, on sera capable de déterminer dans quel domaine de fréquence telle source de bruit influence le bruit d'accélération sur les masses d'épreuve. On décide donc de calculer la densité spectrale de puissance  $DSP$  du bruit d'accélération précédemment défini. Cette quantité est l'observable principale de ce simulateur, du moins dans son rôle de simulateur de bruit.

On présente dans la figure suivante la  $DSP$  du bruit d'accélération obtenue pour une simulation type de  $1.10^6$ s, sectionnée en 10 séquences (cf. exécution du script `LongRun.m` en section 8.8), à une fréquence d'échantillonnage  $f_s = 10\text{Hz}$  et avec l'ensemble des modules du simulateur activé (cf. diagramme en bloc de la figure 8.1).

Sur cette figure, on trace la  $DSP$  du bruit d'accélération exercé sur les deux masses d'épreuve contenues par le satellite local étudié. On compare ces résultats aux exigences sur le niveau de bruit d'accélération, dont sont d'ailleurs tirées les spécifications sur les bruits et imperfections de l'instrument par l'industriel *Airbus Defence & Space*. On s'attend donc à voir correspondre à une fréquence  $f = 1\text{mHz}$  les courbes résultantes de la simulation et la courbe relevant des exigences.

On remarque sur cette courbe que dans la bande de fréquence  $10^{-3} - 10^{-4}\text{Hz}$ , le bruit d'accélération estimé est minimal. Dans cette bande de fréquence, le bruit d'accélération se situe au niveau des exigences en atteignant un niveau de bruit d'environ  $2.10^{-15}\text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 4\text{mHz}$ . On rappelle que la bande de fréquence d'observation de la mission *LISA* est située entre  $10^{-5}\text{Hz}$  et  $10^{-1}\text{Hz}$ . Ce résultat est donc rassurant quant à la cohérence de la simulation et de la stratégie de contrôle modélisée. On note cependant que ce résultat est tiré d'une estimation du bruit d'accélération appliqué sur une seule masse d'épreuve parmi les deux à considérer pour un bras de l'interféromètre. Le bruit sur chaque masse d'épreuve pouvant être considéré comme incohérent, la multiplication de ce niveau par un facteur  $\sqrt{2}$  permet de déduire une estimation du bruit d'accélération observé sur chaque bras<sup>3</sup>. On rappelle que, si nécessaire, le bruit d'accélération peut être calculé pour chaque masse d'épreuve de chaque satellite par l'intermédiaire de l'exécution du script `LongRun_LisaCode.m` (cf. section 8.8).

On se garde néanmoins de donner de quelconques conclusions quantitatives sur la courbe de sensibilité de *LISA* qui s'en déduit. Ces exigences sont naturellement atteintes par le simulateur, du fait des suppositions faites concernant les imperfections et niveaux de bruit de tous ses constituants, essentiellement basées pour l'instant sur des spécifications qui, par définition, sont construites pour atteindre de telles performances. En revanche, ce résultat constitue plus une preuve de cohérence de la modélisation effectuée avec celle réalisée par l'industriel *Airbus Defence & Space*. En

---

3. Ce n'est pas complètement vrai en réalité. Par l'intermédiaire de la simulation, on peut retrouver les accélérations physiques réelles auxquelles sont soumises les masses d'épreuve, et c'est à partir de ces dernières que l'on constitue le bruit d'accélération présenté à la figure 9.3. Mais en réalité, le bruit d'accélération intervient lors de la recombinaison via *TDI* des différents interféromètres locaux et scientifiques, et de ce fait, le lien entre le bruit d'accélération observé sur un bras et les accélérations physiques subies par les masses d'épreuve n'est pas aussi direct. Ces aspects seront abordés en section 12.2.

particulier, l'utilisation des contrôleurs de  $LPF$  pour ce simulateur  $LISA$  ne semble pas, à ce stade, affecter considérablement les performances finales en terme de bruit d'accélération<sup>4</sup>.

Le comportement fréquentiel de ce bruit d'accélération sera étudié dans le chapitre suivant. On déterminera notamment les contributions individuelles de chacun des bruits et imperfections à cette allure. Toutefois, on peut d'ores et déjà remarquer d'assez fortes remontées du niveau de bruit à la fois à basse fréquence et à haute fréquence. D'une part, on note que les modèles de bruit à basse fréquence, provenant encore une fois de spécifications, impliquent souvent des contraintes relativement arbitraires à très basse fréquence. La caractérisation expérimentale du bruit dans ces domaines de fréquence est souvent complexe, et nécessite par définition de longues campagnes de mesure, si bien que le niveau de bruit à très basse fréquence est souvent le fruit d'une extrapolation du comportement fréquentiel dans la bande voisine supérieure. A haute fréquence, on verra que la forte augmentation du niveau de bruit semble provenir de diaphonies importantes au niveau des actuations capacitatives, notamment entre les couples autour de l'axe  $\vec{e}_{x,H}$  et les forces suivant l'axe  $\vec{e}_{x,H}$  commandés pour le contrôle de suspension des masses d'épreuve.

---

4. On constatera néanmoins au chapitre suivant que cette l'adéquation imparfaite des contrôleurs vis à vis de l'expérience  $eLISA$  est en partie responsable de la dégradation des performances à haute fréquence.

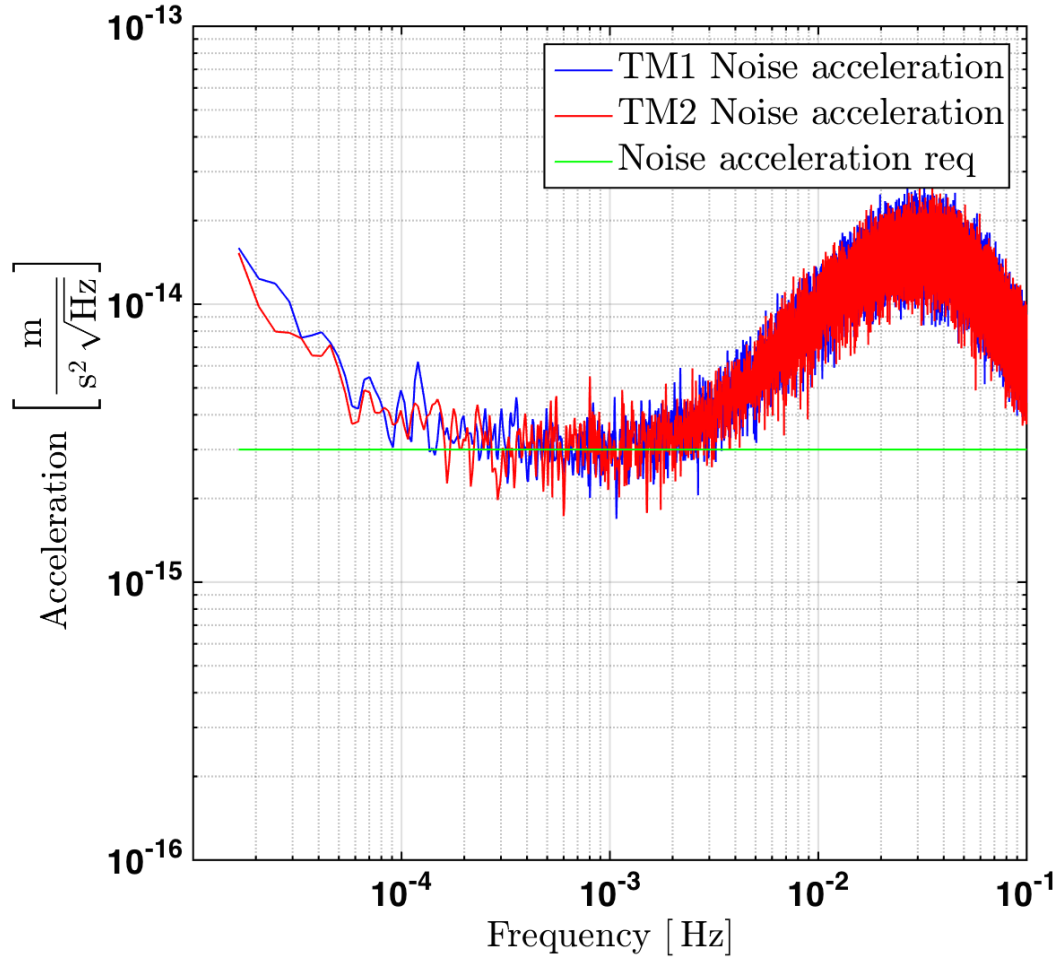


FIGURE 9.3 – Spectres du bruit d’accélération estimé des deux masses d’épreuve d’un satellite de la constellation. L’accélération des masses est projetée suivant l’axe sensible. On représente également pour comparaison l’exigence de niveau de bruit d’accélération  $\tilde{a}_{\text{noise}}^{\text{req}} = 3 \cdot 10^{-15} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2}$ . Les spectres présentés sont des densités spectrales d’amplitude DSA moyennées sur 10 fenêtres temporelles et estimées à partir de simulations de durée totale  $T = 1 \cdot 10^6 \text{ s}$ , de fréquence d’échantillonnage  $f_s = 10 \text{ Hz}$  et après application sur les séries temporelles d’une fenêtre d’apodisation de type Blackmann-Harris.



# Chapitre 10

## Analyse des résultats de simulation

On consacre ce chapitre à la présentation des informations fournies par le simulateur pour les différents types d'exécution (cf. section 8.8). Par l'intermédiaire du script `LongRun.m`, on s'attachera dans un premier temps à faire l'inventaire de l'évolution de chacune des variables dynamiques du système physique, à savoir les positions et orientations relatives du satellite et des masses d'épreuve. On observera notamment leur comportement au sein de la boucle de rétroaction et vérifiera quels sont les niveaux de performance du contrôle de ces variables dynamiques.

Ensuite, on utilisera le script `NoiseDecomposition.m` pour analyser la décomposition du bruit d'accélération suivant les contributions de chaque module de bruit et des imperfections, comme les forces de rappel existant entre le satellite et les masses d'épreuve ou les diaphonies présentes dans les systèmes de mesure et d'actuation. En particulier, on étudiera la forte remontée à haute fréquence du bruit d'accélération en tentant d'identifier son origine.

### 10.1 Evolution des variables dynamiques

Le modèle en boucle fermée fournit en sortie les mesures  $\vec{y}$  de chacune des variables dynamiques du système. Il est néanmoins difficile à partir de ces observations, utilisées dans la boucle de rétroaction, de juger des performances de contrôle des variables dynamiques. Ces observations  $\vec{y}$  sont issues de l'addition des variables dynamiques  $\vec{X}$  observables du système et du bruit  $\vec{n}$  de mesure modélisé. Le contrôleur a pour objectif de minimiser  $\vec{y}$ , et par conséquent, son action peut être influencée aussi bien par l'évolution de variables dynamiques que par le bruit. D'ailleurs, un des facteurs de performance d'une boucle de rétroaction est sa faible sensibilité au bruit, généralement caractérisée par la fonction de transfert  $S$  du même nom. On étudie donc les performances atteintes par le simulateur directement par l'intermédiaire des variables dynamiques  $\vec{X}$  du système. On note que ces variables ne seront bien

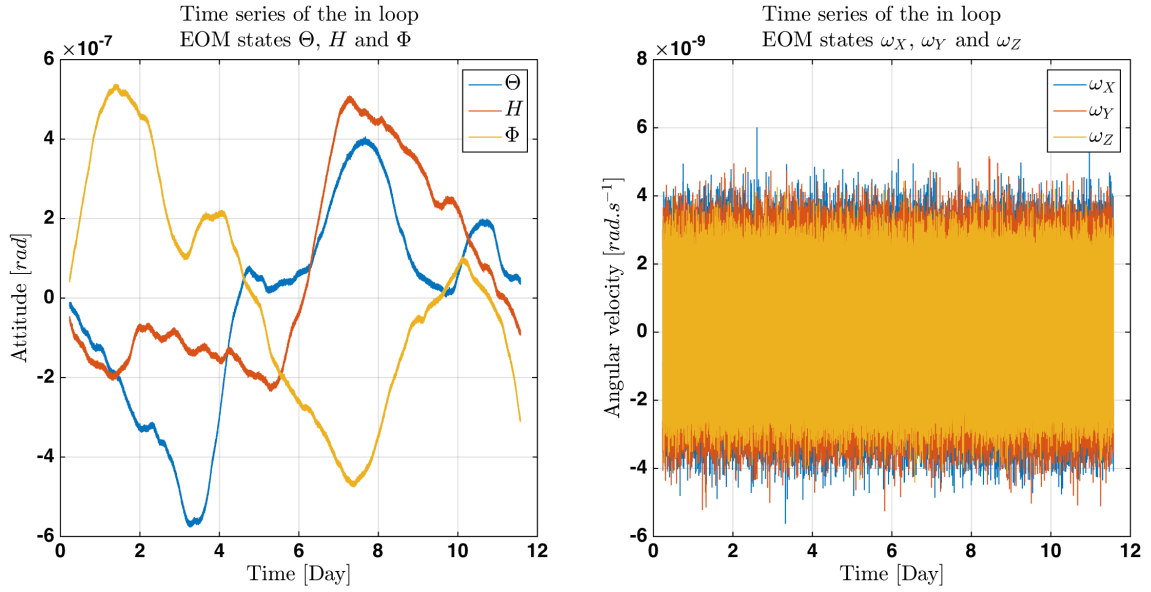


FIGURE 10.1 – Séries temporelles de l'orientation (à gauche) et de la vitesse angulaire (à droite) du satellite par rapport au référentiel de consigne  $O$  pour une simulation de durée  $T = 1.10^6$ s et de fréquence d'échantillonnage  $f_s = 10\text{Hz}$

entendu pas accessibles en vol, du moins au travers des observations  $\vec{y}$  seulement.

### 10.1.1 Stratégie de contrôle et niveau de stabilité des variables dynamiques

Dans les figures suivantes, on expose l'évolution temporelle des positions et orientations des masses d'épreuve dans leur compartiment pour une simulation d'un million de secondes (un peu moins de deux semaines) à une fréquence d'échantillonnage  $f_s = 10\text{Hz}$  et comprenant l'ensemble des bruits et imperfections décrits au chapitre 8. Le calcul a été découpé en plusieurs séquences (cf. section 8.8) et la première, plus courte que les suivantes, a été retirée des résultats présentés. En effet, le simulateur présente des effets transitoires initiaux (constante de temps, overshoot) nettement accentués par la présence des forces continues appliquées sur les masses d'épreuve. La stabilisation du système en boucle fermée nécessite de ce fait une certaine durée, et l'on coupe alors les premières 20000 secondes de la simulation pour garantir l'établissement du régime permanent du système.

Dans chacune de ces figures, on constate une apparente stabilité des variables dynamiques, opérée par le *DFACS*, le système en boucle ouverte étant intrinsèquement instable. On observe que pour les coordonnées de translation, les séries temporelles sont dominées par un bruit haute fréquence qui masque complètement le comportement basse fréquence des variables contrôlées. Ce n'est pas le cas pour les variables d'attitude, pour lesquelles on remarque d'amples fluctuations à basse fréquence.

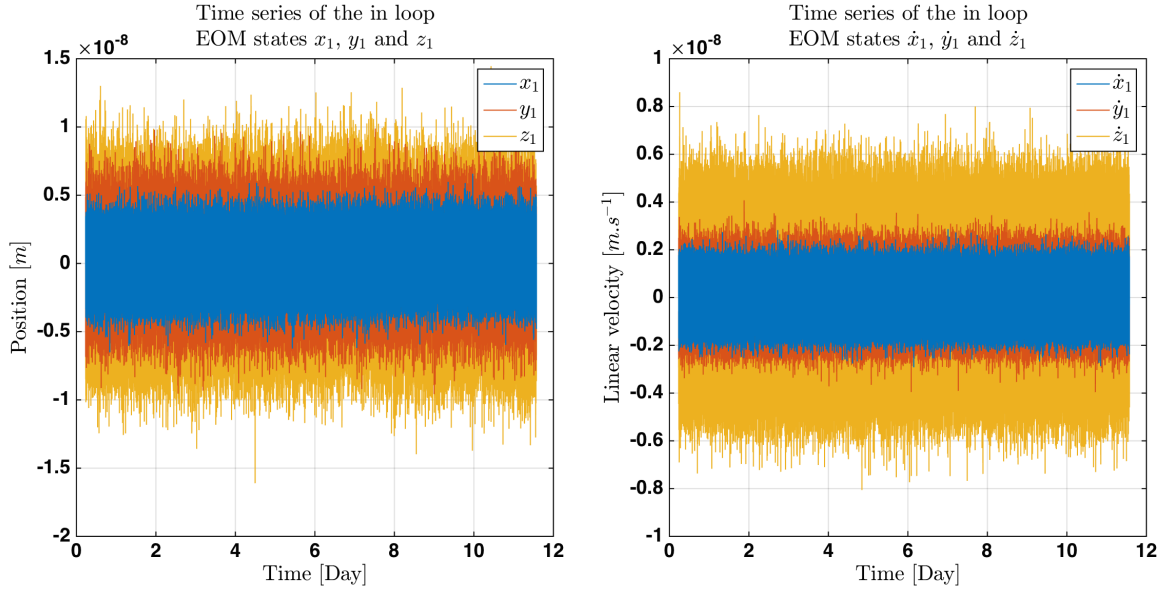


FIGURE 10.2 – Séries temporelles de la position (à gauche) et de la vitesse (à droite) de la masse d'épreuve numéro 1 par rapport au référentiel de son logement H1 pour une simulation de durée  $T = 1.10^6$ s et de fréquence d'échantillonnage  $f_s = 10$ Hz

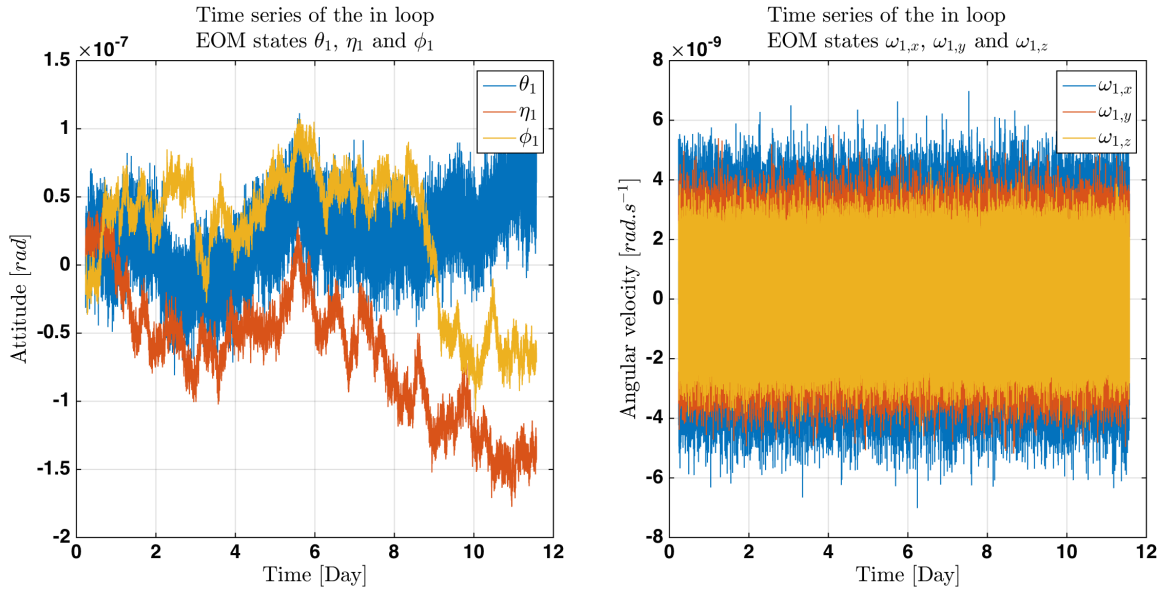


FIGURE 10.3 – Séries temporelles de l'orientation (à gauche) et de la vitesse angulaire (à droite) de la masse d'épreuve numéro 1 par rapport au référentiel de son logement H1 pour une simulation de durée  $T = 1.10^6$ s et de fréquence d'échantillonnage  $f_s = 10$ Hz

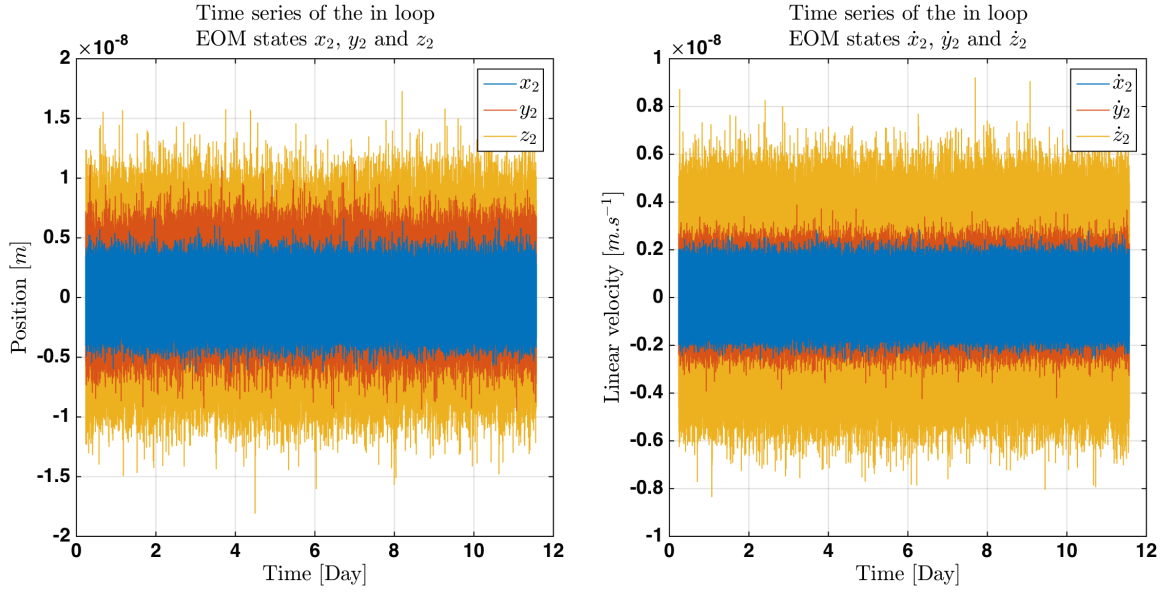


FIGURE 10.4 – Séries temporelles de la position (à gauche) et de la vitesse (à droite) de la masse d'épreuve numéro 2 par rapport au référentiel de son logement H2 pour une simulation de durée  $T = 1.10^6$ s et de fréquence d'échantillonnage  $f_s = 10$ Hz

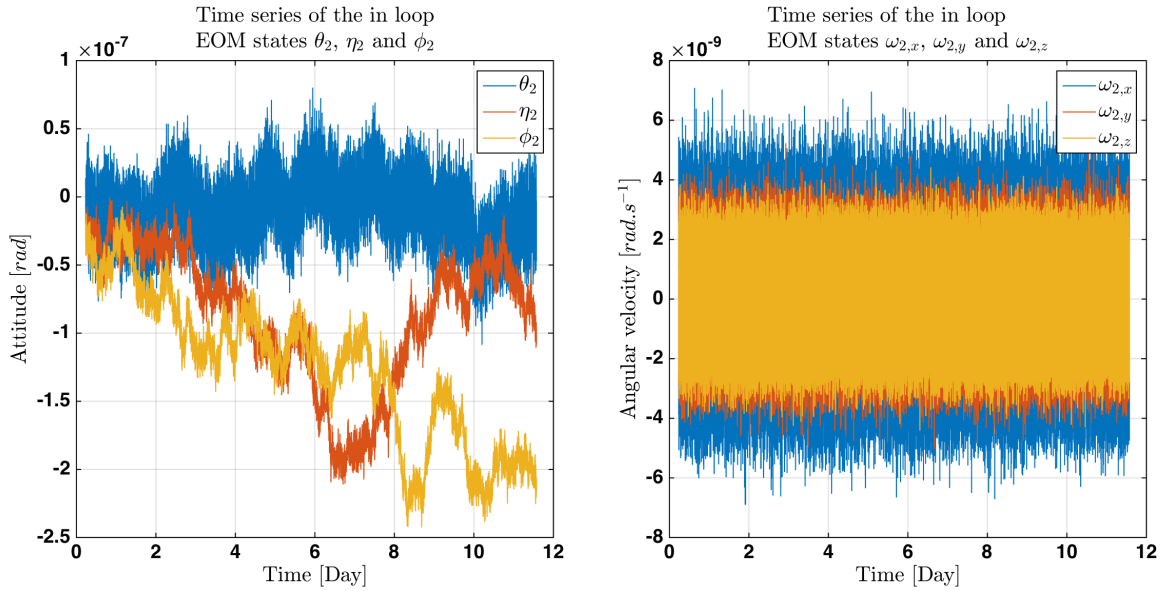


FIGURE 10.5 – Séries temporelles de l'orientation (à gauche) et de la vitesse angulaire (à droite) de la masse d'épreuve numéro 2 par rapport au référentiel de son logement H2 pour une simulation de durée  $T = 1.10^6$ s et de fréquence d'échantillonnage  $f_s = 10$ Hz

En passant en revue les différentes séries temporelles des coordonnées, on peut identifier les stratégies de contrôle, systèmes de mesure et d'actuation leur étant associés :

- En comparant les figures 10.2 et 10.4, on constate que les coordonnées  $z_1$  et  $z_2$  ne possèdent pas le même niveau de fluctuations haute fréquence. En effet, lorsque la première est soumise à la stratégie de contrôle *Drag-Free*, l'autre est contrôlée via la suspension capacitive, ce qui signifie que le bruit d'actuation inhérent au système électrostatique affecte cette dernière coordonnée.
- En observant les figures 10.3 et 10.5, on constate que les variables  $\theta_1$  et  $\theta_2$  font preuve d'un niveau de bruit à haute fréquence plus important que les autres variables angulaires des masses d'épreuve. Dans la section 8.2, on a indiqué que ces variables angulaires ne seront pas mesurées à l'aide du même système de mesure, l'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\vec{e}_{x,H}$  des compartiments étant mesuré par le système capacitif (*IS*), tandis que les angles  $\eta$  et  $\varphi$  respectivement autour des axes  $\vec{e}_{y,H}$  et  $\vec{e}_{z,H}$  sont mesurés par l'intermédiaire du système de mesure différentielle du front d'onde (*IFO*). Or il y a un facteur 10 entre les niveaux de bruit à haute fréquence de ces deux systèmes de mesure rendant le système IFO plus performant.
- De même, on remarque sur les figures 10.2 et 10.4 un niveau de bruit croissant respectivement pour les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ , du fait à la fois des différences en terme d'actuation, selon que la stratégie est de type *Drag-Free* ou de type *Suspension*, et du système de mesure impliqué.

### 10.1.2 Performances requises en régime permanent

La documentation *Airbus Defence & Space* [18] fournit un certain nombre d'exigences concernant le niveau de fluctuations des variables dynamiques en régime permanent. Ces exigences et leur comparaison seront discutées pour la plupart dans la section suivante, par l'intermédiaire de l'analyse des spectres issus des séries temporelles tout juste exposées. Une partie de ces exigences contraignent directement les séries temporelles, en recommandant un seuil maximal pour l'erreur de contrôle en état stationnaire, estimé par l'écart quadratique moyen entre les valeurs prises par une variable dynamique et sa valeur de consigne traquée par le système de contrôle.

Pour la plupart des degrés de liberté dynamiques, l'erreur de contrôle obtenue est inférieure de plusieurs ordres de grandeur aux exigences prescrites par *Airbus Defence & Space*. Plusieurs raisons expliquent ces apparentes bonnes performances. Tout d'abord, le système de mesure est largement idéalisé. En particulier, aucun biais de mesure n'a été implémenté, notamment pour les senseurs capacitifs. De tels biais peuvent effectivement induire une erreur de contrôle en désinformant le système de contrôle du décalage réel entre valeur effective et valeur de consigne. De plus, certaines exigences indiquées sont directement dérivées de celle de *LPF*, dont les exigences de performance, notamment en ce qui concerne la vitesse angulaire du

satellite, sont nettement moins élevées que celle de *LISA*, et ainsi aisément atteintes par le simulateur compte tenu des niveaux de bruit considérés.

Néanmoins, une comparaison pertinente pour cette étude concerne l'erreur en état stationnaire de l'attitude du satellite. On constate que l'erreur concédée par le simulateur est bien supérieure au seuil maximal proposé par l'industriel. Le tableau 10.1 présente la comparaison entre les résultats obtenus et ces seuils d'exigence.

State variable	Steady state error requirement ( $3\sigma$ )	Steady state error achieved ( $3\sigma$ )
$\Theta$	$1.10^{-8}\text{rad}$	$6,9462.10^{-7}\text{rad}$
$H$	$1.10^{-8}\text{rad}$	$6,9462.10^{-7}\text{rad}$
$\Phi$	$1.10^{-8}\text{rad}$	$4,1783.10^{-7}\text{rad}$

TABLE 10.1 – Tableau comparant les exigences d'erreur en régime permanent prescrites par l'industriel Airbus Defence & Space et les performances atteintes par le simulateur concernant le contrôle de l'attitude du satellite

On réalise ici que les contrôleurs utilisés ne semblent pas être suffisamment performants pour atteindre les exigences en état stationnaire requises. Ce résultat n'est pas étonnant, étant donné que ces contrôleurs d'attitude proviennent directement de *LPF* (cf section 8.5.3), dont on a sélectionné des contrôleurs de variable *Drag-Free* plutôt que d'attitude, le contrôle d'attitude de *LISA* étant nettement plus exigeant que pour *LPF*. Ces fortes exigences, qui expliquent par ailleurs les très faibles niveaux d'erreur tolérés dans le tableau 10.1, s'expliquent par les nécessités de performance du pointage, afin d'éviter d'une part un bruit de phase important dû à l'agitation angulaire du satellite et une mauvaise correspondance entre les axes *Drag-Free* du satellite, axes de plus grande sensibilité de l'instrument, et les axes sensibles.

La modification de ces contrôleurs d'attitude paraît donc essentielle et ce point d'amélioration semble constituer une des priorités pour l'avenir. Néanmoins, ces erreurs de contrôle semblent pour le moment ne pas affecter de manière significative le bruit d'accélération subi par les masses d'épreuve.

## 10.2 Performances de contrôle

Le document *Airbus Defence & Space* [18] indique également un certain nombre de prescriptions sur les spectres des déplacements en translation et rotation des trois corps soumis à la boucle de contrôle. Il est ainsi indiqué que chaque degré de liberté dynamique devra être contrôlé à un certain niveau de performance minimal, modélisé par une courbe dans le domaine fréquentiel, pour la bande de fréquence  $10^{-4}\text{Hz} - 1\text{Hz}$ . Dans le cas où ces conditions de stabilité ne sont pas vérifiées, les performances en terme de sensibilité de *LISA*, au travers notamment du bruit d'accélération, peuvent être amenées à se détériorer. Comme évoqué dans la section précédente, un contrôle insuffisant de l'attitude du satellite se traduit par un bruit de chemin optique supplémentaire, de part la fluctuation de l'angle d'incidence du faisceau laser sur le photorécepteur du satellite local, mais aussi en raison de l'écart fluctuant entre l'axe de *Drag-Free*, direction de perturbation minimale pour les masses d'épreuve, et l'axe sensible du détecteur spatial.

Dans cette section, on se propose de comparer les performances atteintes par le simulateur avec les niveaux d'exigence présentés par *Airbus Defence & Space*. On rappelle que la boucle de rétroaction du simulateur a été construite à l'aide des contrôleurs de *LPF*, certainement non-optimaux pour une mission de type *LISA*. Cette analyse est une nouvelle occasion de juger de l'utilisation de ces derniers contrôleurs dans le cadre de *LISA*, particulièrement en ce qui concerne le contrôle d'attitude où l'on a utilisé des contrôleurs *LPF* issus d'une stratégie de contrôle différente (*Drag-Free*).

- Sur la figure 10.6 sont présentées les performances de contrôle de l'attitude du satellite atteintes par le simulateur et le spectre maximal recommandé par l'industriel. Les exigences sont établies afin de réduire les contributions de l'agitation angulaire du satellite sur le bruit de chemin optique de l'interféromètre scientifique. L'industriel suggère ainsi le seuil maximal de fluctuation d'attitude du satellite suivant :

$$\Theta^{req} = H^{req} = \Phi^{req} = 5,6 \cdot 10^{-9} \text{ rad Hz}^{-1/2} \sqrt{1 + \left( \frac{2,8 \text{ mHz}}{f} \right)^4} \quad (10.1)$$

- La figure 10.7 représente quant à elle cette comparaison pour les degrés de liberté de translation des masses d'épreuve, comprenant ainsi à la fois des variables de type *Drag-Free* ( $x_1$ ,  $z_1$  et  $x_2$ ) et de type *Suspension* ( $y_1$ ,  $y_2$  et  $z_2$ ). Les seuils exigés pour ces degrés de liberté dynamiques sont les suivants :

$$x_1^{req} = x_2^{req} = 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ m Hz}^{-1/2} \sqrt{1 + \left( \frac{f}{8 \text{ mHz}} \right)^4} \quad (10.2)$$

$$y_1^{req} = y_2^{req} = 6 \cdot 10^{-9} \text{ m Hz}^{-1/2} \quad (10.3)$$

$$z_1^{req} = z_2^{req} = 9 \cdot 10^{-9} \text{ m Hz}^{-1/2} \quad (10.4)$$

De telles performances réduisent l'intensité des forces de rappel existant entre le satellite et les masses d'épreuve pouvant s'ajouter au bruit d'accélération.

- Dans la figure 10.8 sont concernés les degrés de liberté angulaires des masses d'épreuve. Les performances minimales recommandées du contrôle de l'orientation des masses sont les suivantes :

$$\theta_1^{req} = \theta_2^{req} = 430.10^{-9} \text{ rad Hz}^{-1/2} \sqrt{1 + \left( \frac{f}{8 \text{ mHz}} \right)^4} \quad (10.5)$$

$$\eta_1^{req} = \eta_2^{req} = 75.10^{-9} \text{ rad Hz}^{-1/2} \quad (10.6)$$

$$\varphi_1^{req} = \varphi_2^{req} = 75.10^{-9} \text{ rad Hz}^{-1/2} \quad (10.7)$$

Ces recommandations sont établies pour réduire les contributions de l'agitation angulaire des masses d'épreuve sur le bruit de chemin optique de l'interféromètre local.

Les performances exposées dans les figures précédentes semblent globalement satisfaire les exigences de contrôle dans le domaine fréquentiel considéré ( $10^{-4} \text{ Hz} - 1 \text{ Hz}$ ). On constate néanmoins des performances en dessous des seuils d'exigence pour certaines bandes de fréquence, qui diffèrent selon la nature des degrés de liberté étudiés. Ainsi, dans la figure 10.6, on remarque qu'entre  $10^{-2} \text{ Hz}$  et  $10^{-1} \text{ Hz}$ , l'attitude du satellite est contrainte à un niveau environ deux fois supérieur au seuil maximal recommandé. On se place donc, dans cette bande de fréquence, dans une position où le chemin optique peut être affecté de manière significative d'un bruit provenant de l'agitation angulaire du satellite. Cet effet ne sera pas réellement observé dans l'analyse des résultats du simulateur, la mesure interférométrique et en particulier la présence des quatre quadrants de chaque photodétecteur n'étant pas intégrée explicitement dans le simulateur. On pourra néanmoins étudier l'influence de l'agitation angulaire sur le bruit d'accélération. On a également une détérioration des performances de contrôle pour la position des masses d'épreuve, du moins en ce qui concerne les composantes  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $z_1$  et  $z_2$  dans le même bande de fréquence. Les variables *Drag-Free*  $x_1$  et  $x_2$  semblent épargnées par cette détérioration des performances. Enfin, les variables angulaires affichent également des performances en dessous des exigences, mais cette fois-ci à basse fréquence (entre  $10^{-4} \text{ Hz} - 10^{-3} \text{ Hz}$ ).

On remarque cependant qu'il est difficile d'estimer quantitativement la qualité du contrôle obtenu à l'aide de telles références, tant que les différents sous-systèmes de mesure et d'actuation ne sont pas modélisés de manière plus exhaustive et plus réaliste. L'étude présentée reste tout de même intéressante dans le but de s'assurer de manière qualitative du contrôle raisonnable des variables dynamiques dans la boucle de rétroaction avant de commencer la discussion des résultats de bruit d'accélération.



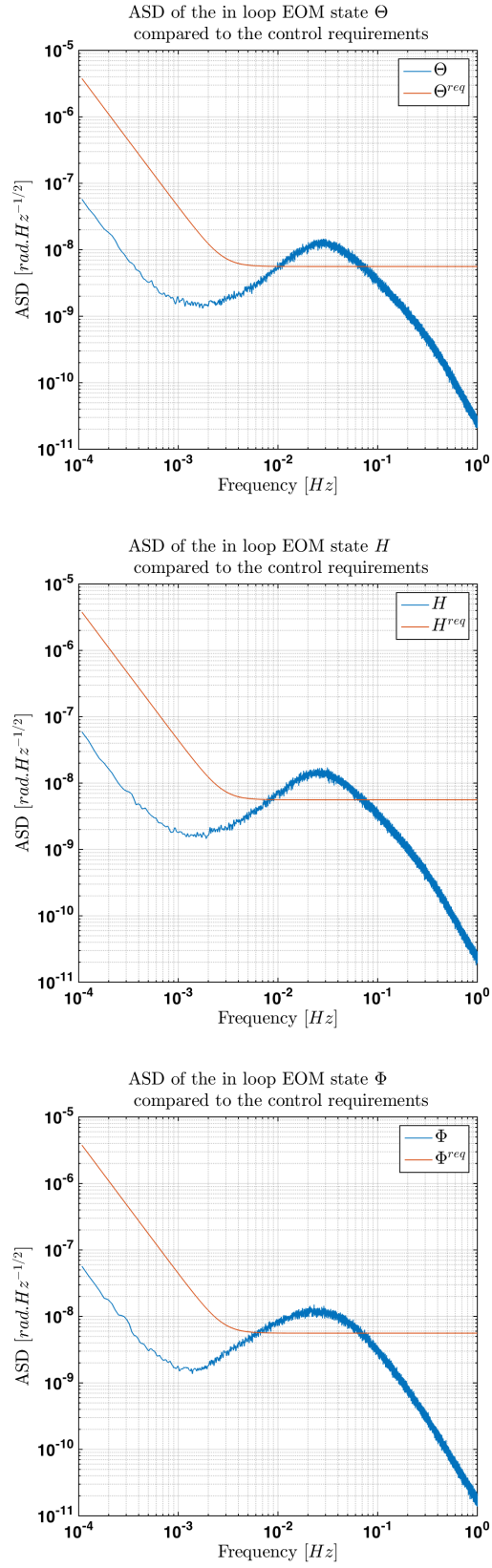


FIGURE 10.6 – Comparaison entre les performances de contrôle d'attitude du satellite et les exigences prescrites par Airbus Defence & Space. Les densités spectrales en amplitude des séries temporelles en figure 10.1 sont confrontées au modèle de seuil de l'industriel.

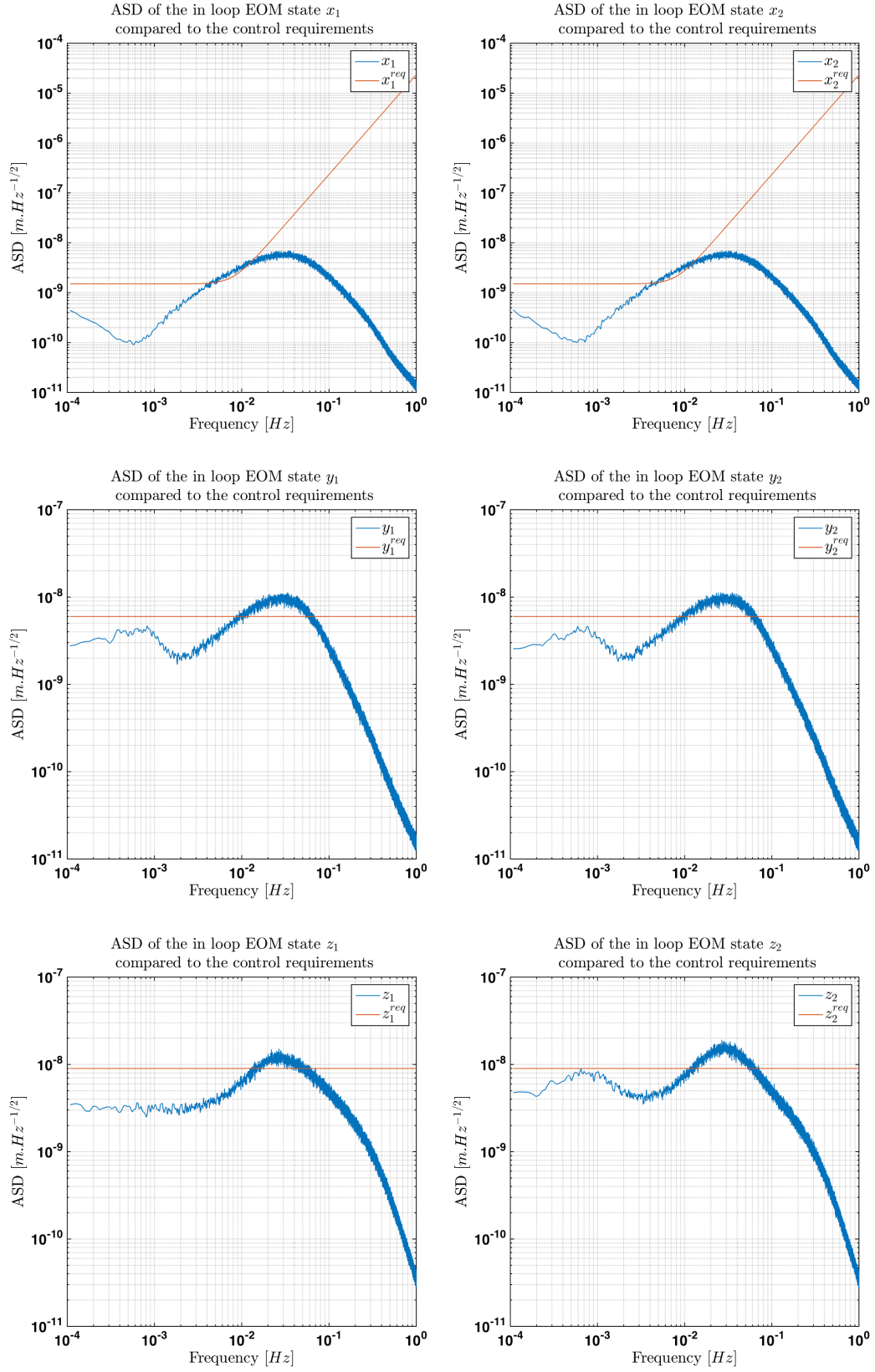


FIGURE 10.7 – Comparaison entre les performances de contrôle de la position des masses d'épreuve dans leur compartiment et les exigences prescrites par Airbus Defence & Space. Les densités spectrales en amplitude des séries temporelles en figure 10.2 et 10.4 sont confrontées au modèle de seuil de l'industriel.

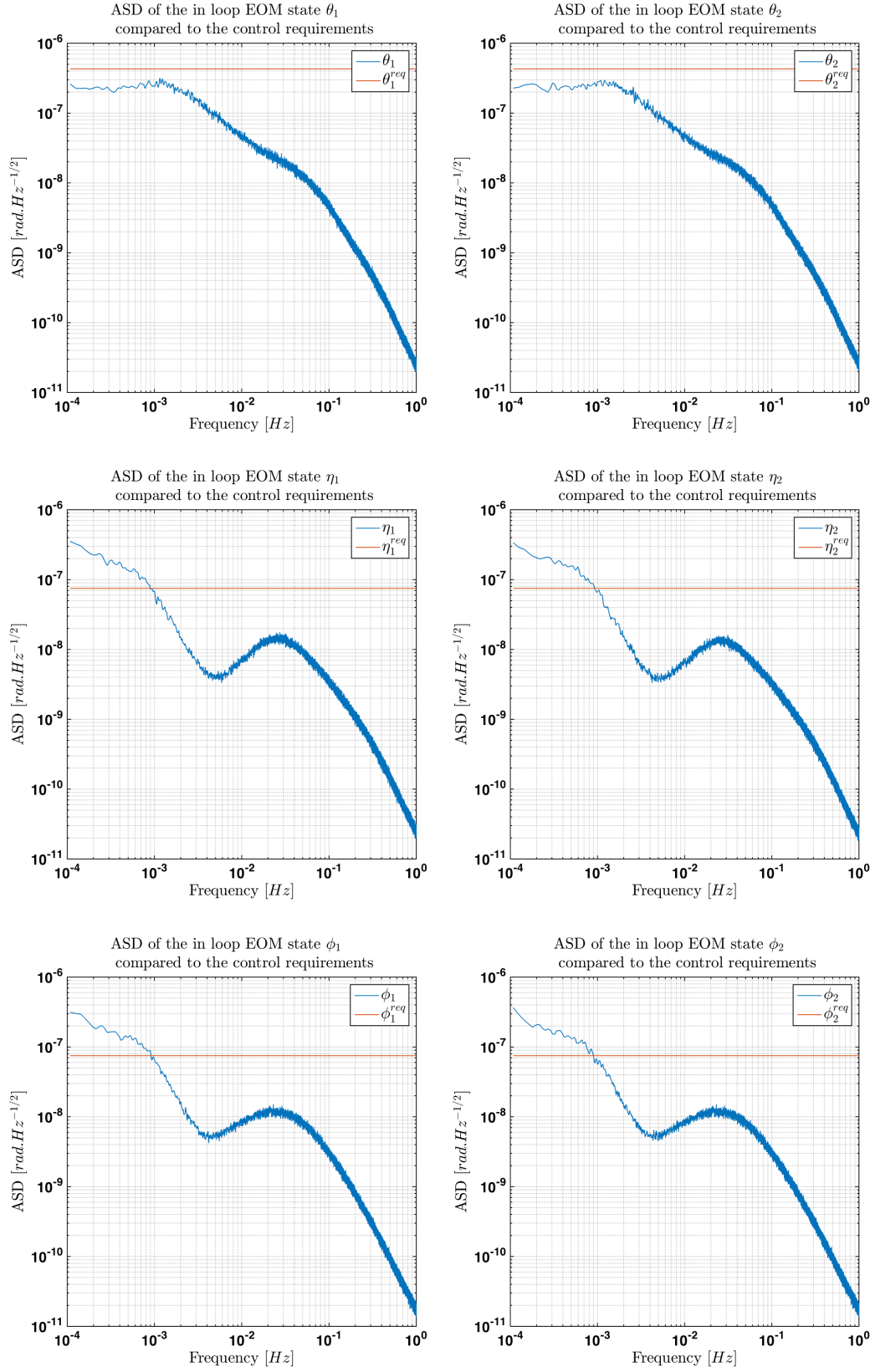


FIGURE 10.8 – Comparaison entre les performances de contrôle de l'orientation des masses d'épreuve dans leur compartiment et les exigences prescrites par Airbus Defence & Space. Les densités spectrales en amplitude des séries temporelles en figure 10.3 et 10.5 sont confrontées au modèle de seuil de l'industriel.

## 10.3 Bruit d'accélération et décomposition de l'influence des différents bruits et imperfections

Un objectif essentiel de ce simulateur est de participer à une meilleure compréhension du détecteur. En particulier, il permet d'étudier l'influence de chaque sous-module, de leurs imprécisions et imperfections, sur les performances finales atteintes et jugées en terme de niveau de bruit d'accélération. La linéarité du simulateur construit offre la possibilité d'une décomposition naturelle des différentes influences des sous-modules sur le bruit d'accélération. La décomposition que l'on propose consiste à activer tour à tour les différents bruits, diaphonies ou forces de rappel, traduisant les imperfections modélisées du détecteur, et d'observer le bruit d'accélération qui résulte de l'influence des imperfections individuelles. En comparant les différents spectres d'accélération obtenus avec celui du modèle complet, on se rend capable de peser ces contributions individuelles dans divers domaines de fréquence.

Les bruits d'accélération calculés proviennent une nouvelle fois de simulations d'une durée de  $4.10^6$ s, divisée en 41 séquences de  $1.10^5$ s, à l'exception de la première, plus courte, que l'on considère pour soustraire les premiers instants de la simulation sujets à un transitoire important. On pratique ainsi 6 simulations différentes, pour lesquelles on active uniquement successivement : le bruit des micropropulseurs, le bruit du système d'actuation capacitif, le bruit de la mesure différentielle de front d'onde, le bruit du système interférométrique, le bruit des senseurs inertiels et enfin, les forces directes appliquées sur les masses d'épreuve. Une dernière simulation est effectuée dans laquelle tous les bruits sont opérationnels simultanément.

On affiche les densités spectrales en amplitude du bruit d'accélération estimé dans chaque simulation dans la figure 10.9. On se concentre pour l'instant sur la décomposition des influences des bruits individuels associés aux différents modules de l'instrument sur le bruit d'accélération, afin d'identifier les contributions dominantes suivant les bandes de fréquence du domaine étudié. On distingue alors trois bandes de fréquence pour lesquelles le bruit d'accélération décrit un comportement différent :

- A basse fréquence, entre  $10^{-5}$ Hz et  $10^{-4}$ Hz, on observe une remontée du bruit d'accélération jusqu'à un niveau de  $10^{-14}$ m Hz $^{-1/2}$ . Cette remontée à basse fréquence semble être dominée de manière équivalente par le bruit de perturbations directes sur les masses d'épreuve et celui du système de mesure interférométrique. En effet, les modèles de bruit utilisés pour ces sous-systèmes admettent bien une remontée dans ce domaine de fréquence. De plus, les perturbations directes se traduisent par l'application d'une accélération sur la masse d'épreuve, et par conséquent, leur influence sur l'allure du bruit d'accélération n'est que le reflet direct de leur comportement fréquentiel.
- En milieu de domaine ( $10^{-4}$ Hz et  $2.10^{-3}$ Hz), au coeur de la bande de fréquence d'observation de *LISA*, le bruit d'accélération paraît cette fois-ci être dominé uniquement par les perturbations directes. Une nouvelle fois, ces perturbations ont une influence directe sur le bruit d'accélération.

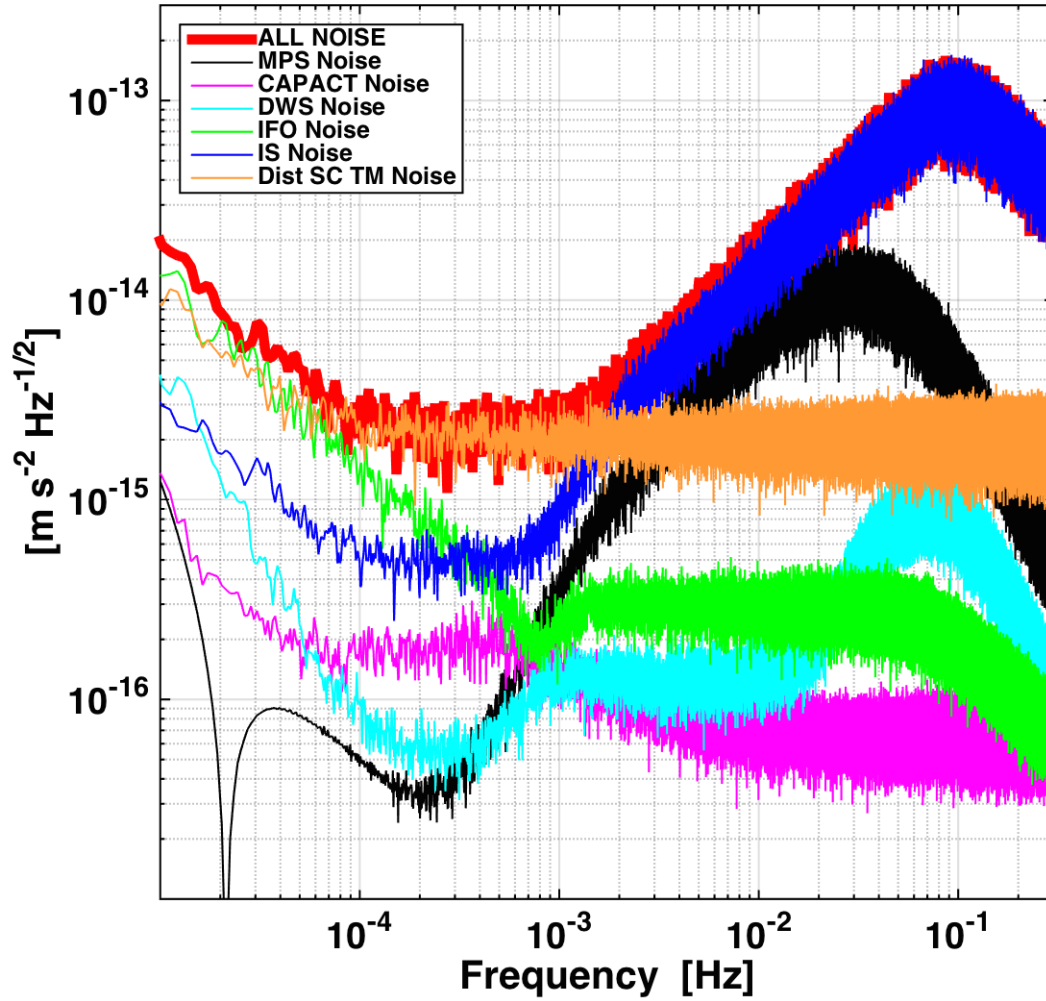


FIGURE 10.9 – Décomposition des contributions de chaque source individuelle de bruit et de perturbation sur le spectre de bruit d'accélération. Les modules de bruit et de perturbation sont tour à tour activés isolément jusqu'à la dernière simulation où tous sont effectifs simultanément. Le caractère linéaire du modèle en boucle fermée permet d'affirmer que la somme des contributions individuelles aboutit au spectre d'accélération total estimé en présence de l'ensemble des sources de bruit et de perturbation. On remarque néanmoins que pour chacune des simulations, on considère une réalisation des bruits distincte, si bien que l'affirmation précédente n'est valable que statistiquement. Les spectres présentés sont des densités spectrales d'amplitude dsa moyennées sur 10 fenêtres temporelles et estimées à partir de simulations de durée totale  $T = 4.10^6$ s, de fréquence d'échantillonnage  $f_s = 10$ Hz et après application sur les séries temporelles d'une fenêtre d'apodisation de type Blackmann-Harris.

- A haute fréquence, on observe une remontée considérable de l'influence du bruit des senseurs inertiels sur le bruit d'accélération. Cette source d'incertitude domine largement le bruit d'accélération à partir de la fréquence  $f = 2.10^{-3}$ Hz. En fait, la contribution du bruit des senseurs inertiels est très

indirecte et agit sur le bruit d'accélération par l'intermédiaire des diaphonies d'actuation du système capacitif. La sensibilité de la boucle d'asservissement vis à vis du bruit des senseurs semble être mise en évidence ici. On discutera plus longuement de ce phénomène important dans les sections suivantes.

- A la fréquence  $10^{-1}\text{Hz}$ , on observe une rupture brutale de la pente de la courbe qui commence alors à décroître. On interprète cette rupture comme étant induite par le gain des contrôleurs. On observe en effet sur les figures 8.16 et 8.16 que le gain des contrôleurs chutent brutalement aux environs de la fréquence  $10^{-1}\text{Hz}$ . Ce qui signifie qu'au-delà de  $10^{-1}\text{Hz}$ , le contrôle effectué par le système capacitif s'efface peu à peu réduisant ainsi toutes perturbations directes sur les masses d'épreuve induites par diaphonie suivant l'axe *Drag-Free*.

Le bruit du système capacitif a ici une influence secondaire sur le bruit d'accélération, son action étant interdite suivant les axes *Drag-Free* par la stratégie de contrôle. On remarque ici l'intérêt d'avoir distingué les bruits d'origine capacitive des perturbations externes directes sur les masses d'épreuve comme évoqué dans la section 8.3.2. Cela permet notamment d'observer la stratégie de contrôle à l'oeuvre sur la figure 10.9, en remarquant la faible contribution du bruit capacitif.

L'influence du système de micropropulsion, quant à elle, s'exerce, plutôt à haute fréquence entre  $10^{-3}\text{Hz}$  et  $3.10^{-2}\text{Hz}$ . Au-delà de  $3.10^{-2}\text{Hz}$ , on observe à nouveau une rupture dans le comportement du bruit d'accélération qui s'explique par une chute du gain du modèle de bruit associé aux micropropulseurs à haute fréquence (cf. section 8.3.1).

### 10.3.1 Bruit d'accélération à basse fréquence : perturbations directes et système interférométrique

On désire expliquer l'origine de l'influence à basse fréquence des bruits d'interférométrie et des forces perturbatrices directes. Pour cette dernière perturbation, l'influence est tout à fait directe, puisqu'elle consiste à appliquer directement une accélération sur les masses d'épreuve selon les axes *Drag-Free*  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$ . La nature de ces forces perturbatrices a été détaillée dans la section 8.4.1.

Dans la figure 10.10, on étudie la corrélation entre l'allure du bruit d'accélération à basse fréquence et la coloration des bruits individuels dans ce domaine. A cet effet, on modifie tous les modèles de bruit en considérant uniquement des bruits blancs en entrée du simulateur. On observe ainsi sur la figure qu'à basse fréquence,  $10^{-5}\text{Hz}$  et  $10^{-3}\text{Hz}$ , et seulement dans ce domaine, les mêmes spectres d'influence déjà présentés dans la figure 10.9 s'aplatissent. Le comportement du bruit d'accélération dans ce domaine de fréquence semble donc complètement corrélé aux comportements fréquentiels des bruits individuels. Dans cette situation, le bruit d'accélération est plus largement encore dominé par les perturbations directes.



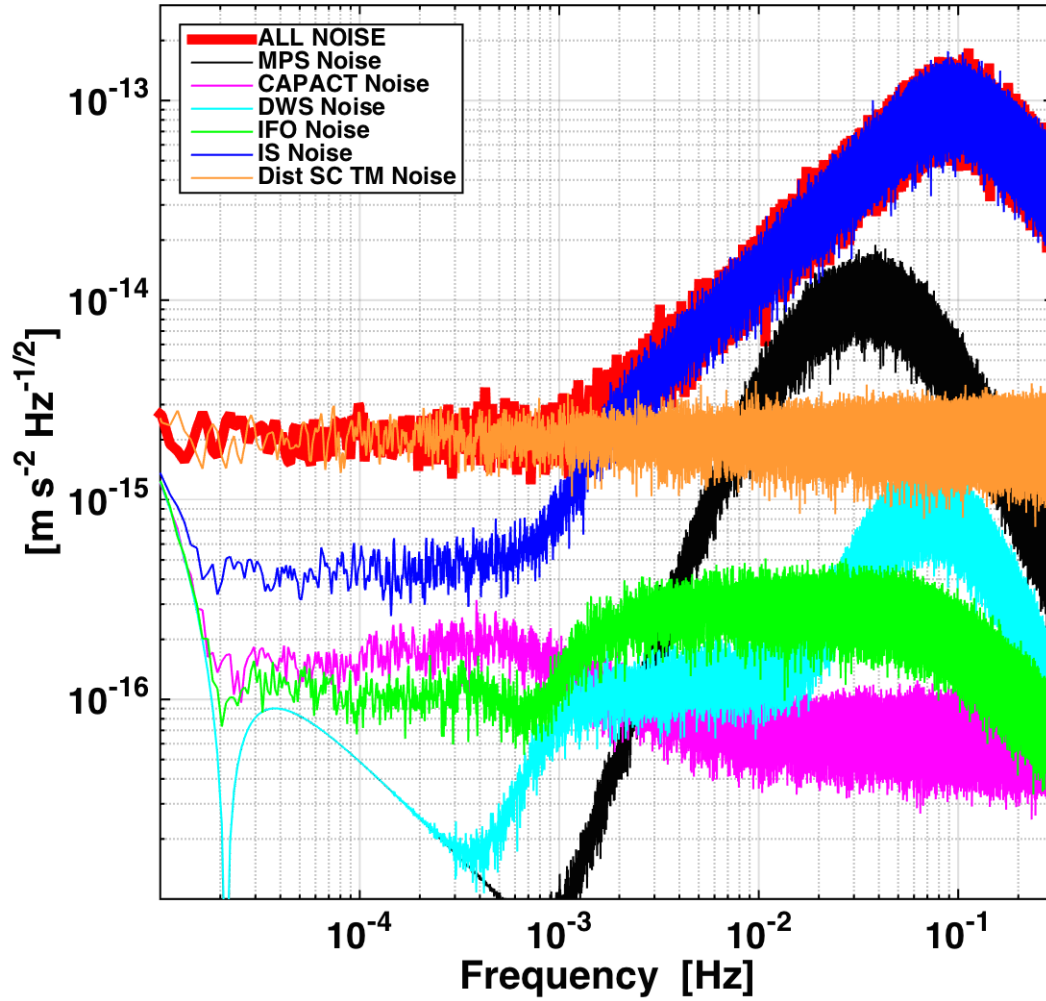


FIGURE 10.10 – Décomposition des contributions de chaque source individuelle de bruit et de perturbation sur le spectre de bruit d'accélération ( $T = 4.10^6$ s, moyenne sur 10 fenêtres temporelles,  $f_s = 10$ Hz, fenêtre de type Blackmann-Harris). Sur cette figure, on considère des modèles de bruit uniformes dans le domaine de fréquence. Il en résulte un aplatissement du spectre du bruit d'accélération à basse fréquence. Cette figure doit être comparée à la figure 10.9.

En ce qui concerne les bruits de mesure interférométrique, le lien est plus indirect et nécessite davantage d'investigations. Le modèle de bruit du système interférométrique considéré admet une forte remontée à basse fréquence comme on l'a évoqué en section 8.2.2. Ce bruit de mesure important est interprété par les contrôleurs comme un mouvement des masses d'épreuve, et ces derniers réagissent en commandant des forces au satellite afin de recentrer les masses suivant les axes  $\vec{x}$  des compartiments, en accord avec la stratégie *Drag-Free*. Les forces de rappel existantes entre le satellite et les masse d'épreuve (cf. section 8.4.2) vont terminer de corrélérer ce bruit de mesure

avec le bruit d'accélération subi par les masses d'épreuve.

Dans la figure 10.11, on réalise à nouveau la même succession de simulations en supprimant, pour chacune d'entre elles, les forces de raideur existantes entre le satellite et les masses d'épreuve. On observe alors une chute très nette de l'effet du bruit interférométrique sur le bruit d'accélération à basse fréquence, ce qui semble conforter l'interprétation donnée au paragraphe précédent.

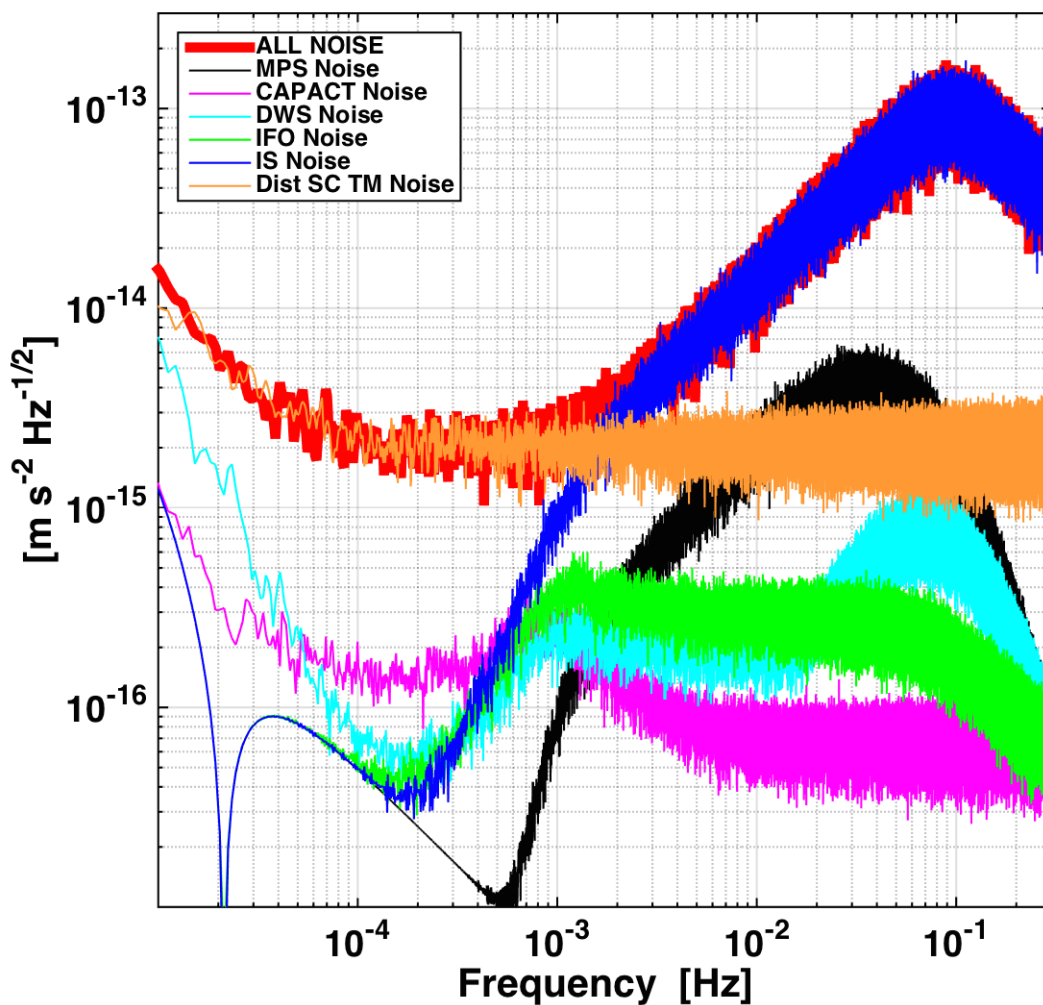


FIGURE 10.11 – Décomposition des contributions de chaque source individuelle de bruit et de perturbation sur le spectre de bruit d'accélération ( $T = 4.10^6 s$ , moyenne sur 10 fenêtres temporelles,  $f_s = 10 Hz$ , fenêtre de type Blackmann-Harris). Sur cette figure, on supprime les forces de raideur existantes entre le satellite et la masse d'épreuve. On observe alors un effondrement de l'influence du bruit des senseurs interférométriques et capacitifs à basse fréquence. Cette figure doit être comparée à la figure 10.9.

On note également à partir de cette figure que l'influence du bruit de mesure interférométrique n'est pas la seule à être fortement diminuée par la désactivation



des forces de rappel. C'est le cas aussi du bruit des senseurs inertiels et du bruit d'actuation capacitive. On peut donc généraliser cette interprétation en proposant qu'à basse fréquence toute agitation des masses d'épreuve autour de leur position de consigne au sein de leur compartiment est responsable d'un bruit d'accélération important par couplage avec la raideur du système. Le bruit d'actuation capacitive, de manière directe, ou le bruit des senseurs inertiels, par l'intermédiaire de la loi de contrôle, sont responsables d'une telle agitation, particulièrement à basse fréquence où les modèles de bruit considérés admettent généralement de fortes remontées. On rappelle que cette raideur (positive) implique des forces qui déstabilisent le système : plus la masse d'épreuve s'éloigne de son point d'équilibre et plus ces forces encouragent cet éloignement. Le terme de forces de rappel, introduit par analogie avec un oscillateur harmonique, paraît alors abusif puisque c'est bien l'inverse qui se produit ici.

### 10.3.2 Bruit d'accélération à haute fréquence : senseurs inertiels et système de micropropulsion

Dans le domaine des hautes fréquences, on constate une très large domination de l'influence des senseurs inertiels, qui commence autour de  $2 \cdot 10^{-3}$  Hz pour culminer à  $10^{-1}$  Hz, fréquence à partir de laquelle sa contribution s'effondre, en concordance avec la fonction de transfert de la loi de contrôle en suspension. Cette influence, bien que considérable est tout à fait indirecte. En fait, il faut d'abord remarquer que les variables dynamiques mesurées par les senseurs inertiels sont toutes des variables contrôlées en suspension, c'est-à-dire à l'aide du système d'actuation capacitif. Ces actuations peuvent être sujettes à d'importantes diaphonies, transformant par exemple une commande de forces suivant l'axe  $Y$  d'un compartiment, ou aussi bien un couple autour de cet axe, en la force ou le couple effectif correspondant auquel s'ajoute une force ou couple suivant un autre axe, en particulier l'axe  $\vec{x}$  de *Drag-Free* censé être épargné de toutes forces directes. Cette imperfection géométrique du système d'actuation capacitif a donc tendance à engendrer des forces suivant les axes *Drag-Free*, alors même que ces axes devraient en être entièrement préservés par définition.

Les senseurs inertiels constituent un système de mesure des déplacements plus imprécis que la mesure interférométrique, introduisant un bruit de mesure plus important. A nouveau, ce bruit de mesure peut être interprété par les contrôleurs comme des déplacements ou rotations réels des masses, engageant alors des forces commandées pour stabiliser le système. Le bruit des senseurs sera ainsi corrigé par le système capacitif, qui introduit alors par diaphonie des forces sur les masses suivant l'axe *Drag-Free*. Les niveaux de bruit importants des senseurs inertiels aggravent la situation en nécessitant des forces commandées plus élevées.

Dans la figure 10.12 on réalise la même démarche que dans la figure précédente. On réalise la série de simulations en désactivant à chaque fois la matrice de diaphonie introduisant les imperfections géométriques du système d'actuation capacitif. On

observe alors une très claire diminution du niveau de bruit d'accélération à haute fréquence, l'influence du bruit des senseurs inertiels étant reléguée à la troisième contribution par ordre d'importance. Le bruit du système de micropropulsion domine maintenant le niveau de bruit dans ce domaine de fréquence.

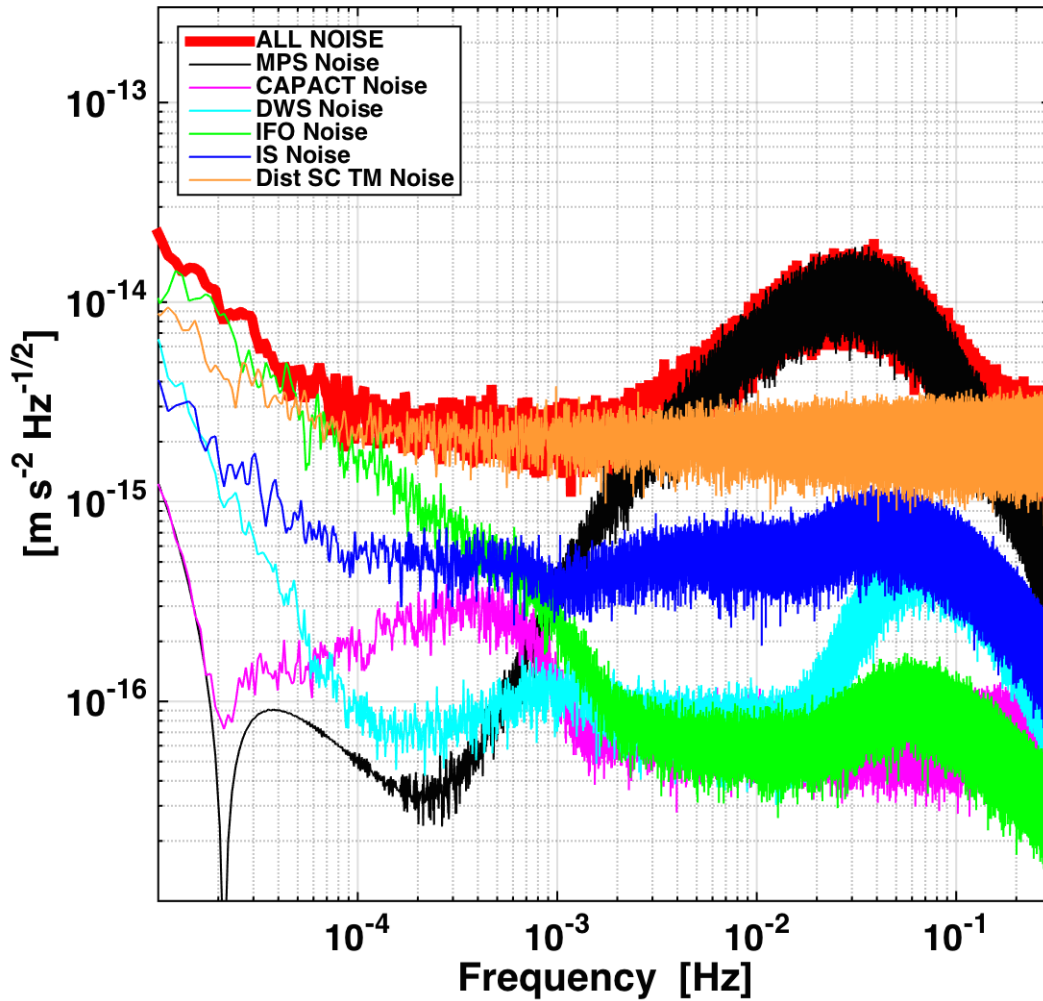


FIGURE 10.12 – Décomposition des contributions de chaque source individuelle de bruit et de perturbation sur le spectre de bruit d'accélération ( $T = 4.10^6$ s, moyenne sur 10 fenêtres temporelles,  $f_s = 10$ Hz, fenêtre de type Blackmann-Harris). Sur cette figure, on supprime les diaphonies d'actuation du système capacitif. On constate la chute de l'influence du bruit des senseurs inertiels à haute fréquence. Cette figure doit être comparée à la figure 10.9.

Par l'intermédiaire de cette figure, on révèle l'origine de l'influence du bruit des senseurs inertiels dans le spectre du bruit d'accélération estimé. Cette influence semble clairement être la conséquence des diaphonies d'actuation. On se propose d'aller plus loin, en cherchant à savoir quels éléments de la matrice de diaphonie sont particulièrement responsables. Sur la figure 10.13, on représente la même série

de simulations où l'on a cette fois-ci désactivé un seul élément de la matrice de diaphonie d'activation capacitive. Cet élément, noté  $\chi_{\theta \rightarrow x}^{CAPACT}$ , exprime la fuite du couple commandé par les contrôleurs autour de l'axe  $\vec{x}_1$  du compartiment de la masse d'épreuve numéro 1 vers une force résiduelle appliquée suivant l'axe  $\vec{x}_1$ . On constate alors que l'effet de la diaphonie discutée précédemment semble entièrement se résumer à cet élément, l'influence des senseurs inertiels étant considérablement réduit à l'instar de la figure 10.12.

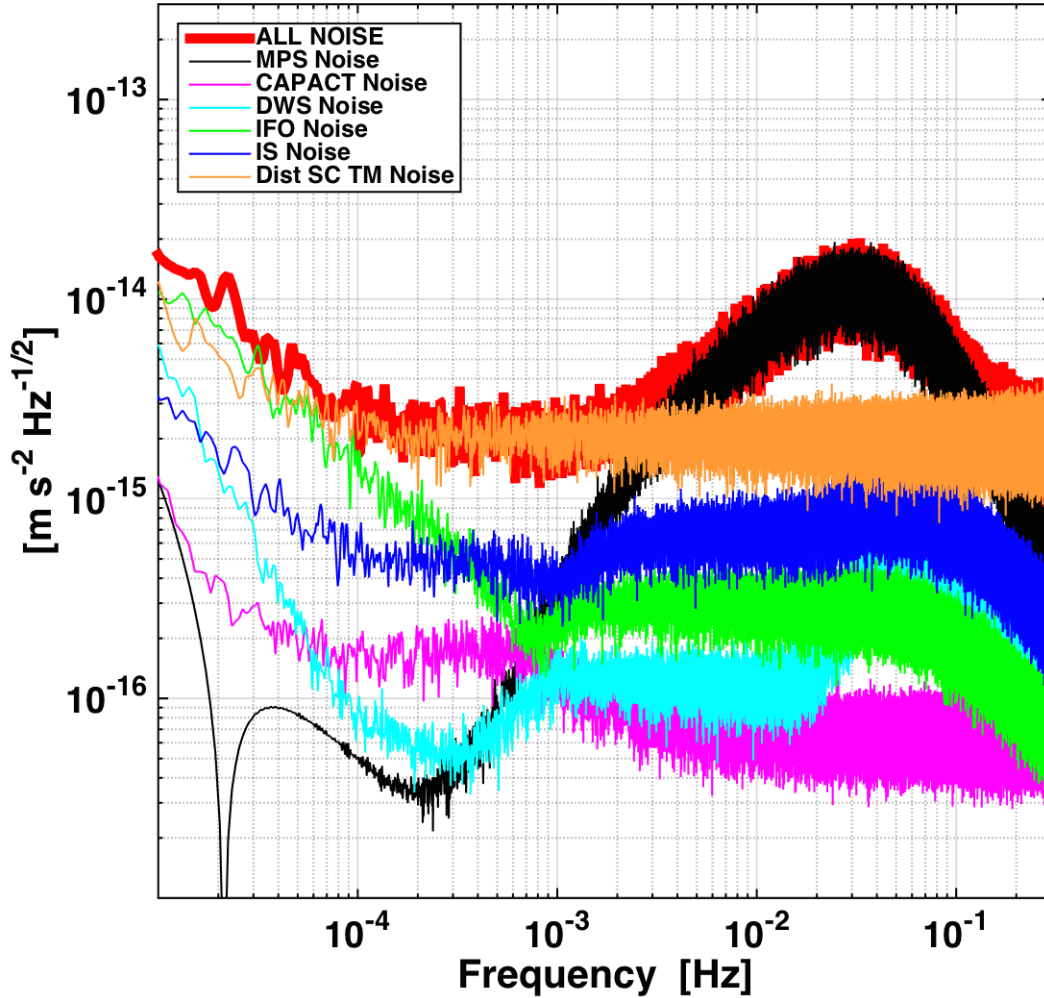


FIGURE 10.13 – Décomposition des contributions de chaque source individuelle de bruit et de perturbation sur le spectre de bruit d'accélération ( $T = 4.10^6$ s, moyenne sur 10 fenêtres temporelles,  $f_s = 10$ Hz, fenêtre de type Blackmann-Harris). Sur cette figure, on supprime uniquement le terme de diaphonie  $\chi_{\theta \rightarrow x}$  du système capacitif d'actuation. On constate également une chute de l'influence du bruit des senseurs inertiels à haute fréquence. Cette figure doit être comparée aux figures 10.9 et 10.12.

Physiquement, cette constatation paraît étonnante puisque la rotation mise en

jeu dans cet effet est la rotation suivant l'axe  $\vec{x}_1$ . Au premier abord, on aurait tendance à penser que la commande d'un couple suivant les deux autres axes  $\vec{y}_1$  et  $\vec{z}_1$  serait plus à même d'engendrer une force résiduelle suivant l'axe  $\vec{x}_1$ . Par exemple, dans le cas où le potentiel de chaque électrode impliquée dans l'application du couple n'est pas identique en valeur absolue, on introduit alors une telle force résiduelle. C'est d'ailleurs une des principales sources de diaphonie pour ce système d'actuation. Mais les rotations autour de  $\vec{x}_1$  ne sont pas concernées au premier ordre par cette situation, car les électrodes sollicitées par un tel couple ne sont pas réparties suivant les faces  $X$  du compartiment (cf figure 8.5).

En réalité, une telle influence sur le bruit d'accélération s'explique par le fait que la variable angulaire  $\theta$  de rotation autour de l'axe  $\vec{x}$  est la seule variable angulaire à être mesurée par l'intermédiaire des senseurs inertiels, introduisant un niveau de bruit plus important que celui du système interférométrique. De plus, les valeurs de diaphonie utilisées dans le modèle et recommandées par l'industriel *Airbus Defence & Space* semblent avoir été amplifiées de manière arbitraire, en particulier pour l'élément  $\chi_{\theta \rightarrow x}^{CAPACT}$  ici concerné, dont la valeur indiquée est  $0,21739 \text{ rad m}^{-1}$  [18]. On note que ces valeurs proviennent directement de celles estimées pour l'expérience *LPF* [16]. Enfin, l'utilisation des contrôleurs de *LPF* pourrait faire preuve d'une certaine responsabilité sur ces effets de diaphonie, en sollicitant des couples d'actuation trop élevés autour des axes  $\vec{x}$ . Au vu de l'importance du phénomène, il semble nécessaire de s'y arrêter un instant. On consacre la section suivante à la description physique de la diaphonie d'actuation et plus généralement à l'interprétation d'un tel impact sur le bruit d'accélération.

Une fois l'influence de la diaphonie d'actuation retirée, la contribution dominante au bruit d'accélération devient le bruit des micropropulseurs. Dans la figure 10.11 correspondant à la suppression des forces de raideur, on a pu remarquer un affaiblissement de l'influence de ce bruit. En effet, le bruit des micropropulseurs entraîne une agitation du satellite qui, au travers de la raideur du système, affecte les masses d'épreuve. De plus, une agitation angulaire du satellite impose à la loi de contrôle une actuation angulaire via le système capacitif qui, comme on vient de l'observer, introduit une accélération résiduelle sur les masses d'épreuve par l'intermédiaire de la diaphonie d'actuation. Ces deux effets de raideur et de diaphonie se combinent pour expliquer cette contribution significative. Dans la figure 10.14, on désactive à la fois les forces de raideur et les diaphonies. On constate alors un net recul de cette influence sur le bruit d'accélération à haute fréquence, ce dernier étant alors sensiblement dominé par les forces de perturbation directes.

## 10.4 Bruit d'accélération et diaphonie d'actuation

Dans la documentation de l'industriel *Airbus Defence & Space* au sujet des spécification de *LISA* [18], on remarque des recommandations particulières, non discutées jusqu'à présent, concernant les actuations capacitives maximales commandées par la loi de contrôle. L'industriel prescrit alors de ne pas dépasser les niveaux d'actuation

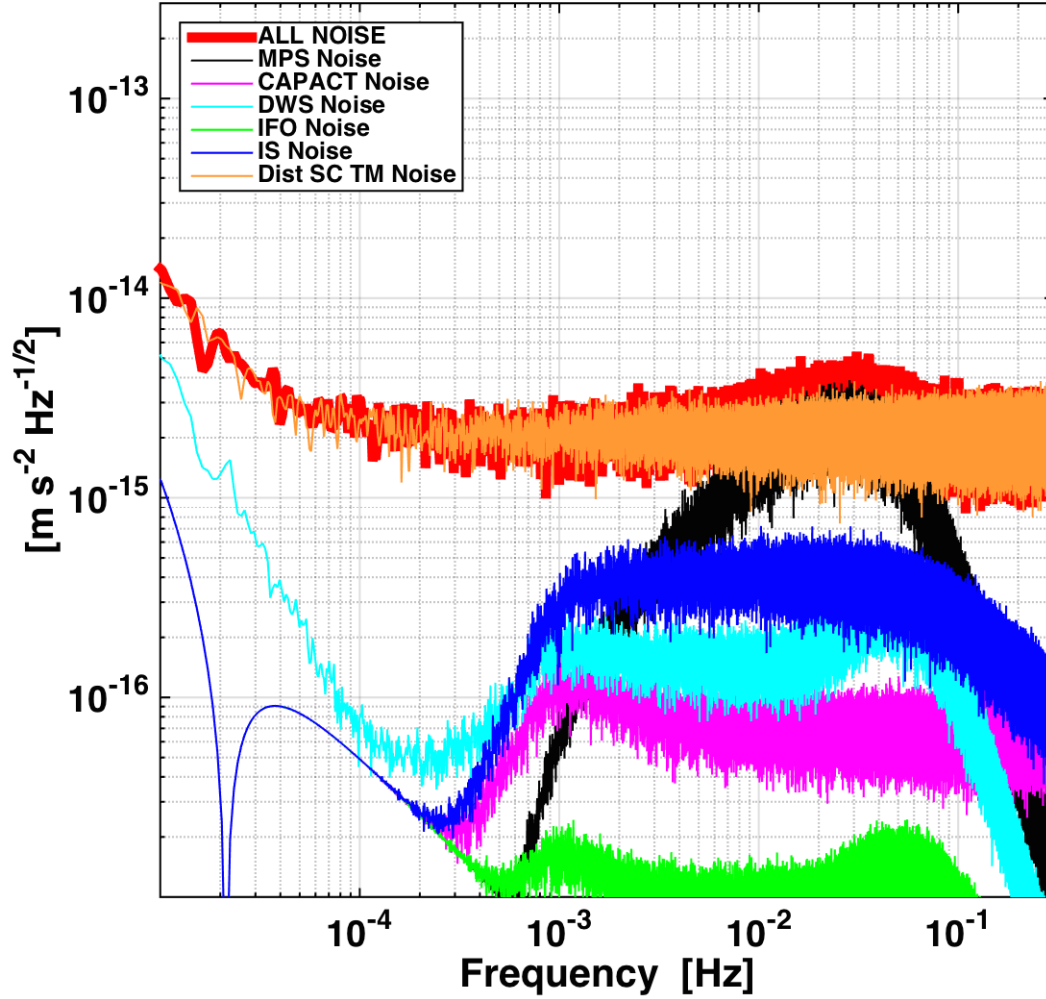


FIGURE 10.14 – Décomposition des contributions de chaque source individuelle de bruit et de perturbation sur le spectre de bruit d'accélération ( $T = 4.10^6$ s, moyenne sur 10 fenêtres temporelles,  $f_s = 10$ Hz, fenêtre de type Blackmann-Harris). Sur cette figure, on désactive à la fois les forces de raideur et les diaphonies d'actuation du système capacitif. Le niveau du bruit d'accélération à haute fréquence diminue considérablement après la forte réduction des contributions du bruit des senseurs inertiels et du système de micropropulsion, jusqu'alors prépondérantes dans ce domaine de fréquence. Cette figure doit être comparée aux figures 10.9 et 10.12.

commandés suivants, donnés en unité d'accélération :

$$u_{y1}^{req} = u_{y2}^{req} = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2} \sqrt{1 + \left( \frac{f}{8 \text{ mHz}} \right)^4} \quad (10.8)$$

$$u_{z2}^{req} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{8 \text{ mHz}}\right)^4} \quad (10.9)$$

$$u_{\theta_1}^{req} = u_{\theta_2}^{req} = 1,35 \cdot 10^{-11} \text{ rad s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{8 \text{ mHz}}\right)^4} \quad (10.10)$$

$$u_{\eta_1}^{req} = u_{\eta_2}^{req} = 0,17 \cdot 10^{-11} \text{ rad s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{8 \text{ mHz}}\right)^4} \quad (10.11)$$

$$u_{\varphi_1}^{req} = u_{\varphi_2}^{req} = 0,17 \cdot 10^{-11} \text{ rad s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{8 \text{ mHz}}\right)^4} \quad (10.12)$$

Ces recommandations sont établies afin de minimiser les effets de diaphonie organisant la fuite des actuations suivant les axes cités vers l'axe *Drag-Free*. Autrement dit, respecter ces recommandations de niveau d'actuation réduirait nettement l'influence de la diaphonie d'actuation sur le bruit d'accélération que l'on a observé dans la section précédente. Ces prescriptions ont été évaluées pour des valeurs de diaphonie données, en réalité directement tirées de *LPF*. Cependant, ces valeurs de diaphonie semblent plutôt pessimistes pour quelques degrés de liberté, en particulier pour l'élément de diaphonie  $\chi_{\theta \rightarrow x}^{CAPACT}$  transformant une actuation angulaire en  $\theta$  vers une force appliquée suivant l'axe  $\vec{x}$ .

On aperçoit alors deux chemins possibles pour réduire l'influence de la diaphonie sur le bruit d'accélération final :

- On peut s'assurer que les forces et couples commandés par la loi de contrôle au système d'actuation capacitif ne dépasse les seuils fixés par *Airbus Defence & Space*. Dans ce cas, la loi de contrôle est directement concernée et une modification est nécessaire au vu des résultats obtenus dans la section précédente.
- On peut estimer que la diaphonie est surestimée. Dans ce cas les exigences prescrites en terme d'actuation maximale deviennent excessives, et on peut se satisfaire d'une loi de contrôle moins performante.

Ces deux orientations distinctes seront discutées dans les sections suivantes.

## 10.4.1 Seuil maximal d'actuation et performances de contrôle

### Forces et couples commandés par le contrôle en suspension

On se propose de comparer les forces commandées aux actuateurs capacitifs lors des simulations présentées en section 10.3 avec les exigences de l'industriel, en

particulier celles impliquant le contrôle des angles  $\theta$ , angle de rotation des masses d'épreuve autour de leur axe  $\vec{x}$  respectif, mentionné à l'équation 10.10.

Il est possible de paramétrer le simulateur de sorte qu'il renvoie en sortie les forces et couples instantanés commandés par les contrôleurs (module *DFACS* de la figure 8.1). En estimant le spectre d'amplitude de ces commandes, on présente cette comparaison dans la série de figures suivante.

En passant en revue l'ensemble de ces spectres, on remarque un dépassement fréquent des seuils d'actuation dans la bande de fréquence de  $10^{-3}\text{Hz}$  à  $10^{-2}\text{Hz}$  d'un facteur inférieur à 10. Ce dépassement de seuil est sensiblement plus franc pour le cas de l'actuation angulaire en  $\theta$ , en figure 10.17, pour lequel le domaine de fréquence concerné atteint quasiment  $10^{-1}\text{Hz}$ . Ce domaine coïncide bien avec celui de la domination de l'influence des senseurs inertiels, et donc de la diaphonie d'actuation, sur le spectre du bruit d'accélération (cf. figure 10.9). On a donc une corrélation claire entre cette transgression des exigences et la détérioration des performances à haute fréquence du simulateur en terme de bruit d'accélération.

### Sensibilité de la boucle de contrôle au bruit des senseurs inertiels

Ces actuations trop importantes demandées par la boucle de contrôle semblent donc être responsables d'un tel niveau de bruit d'accélération à haute fréquence. On interprète ces niveaux de commande comme influencés par le fort niveau de bruit provenant des senseurs capacitifs. Les contrôleurs acquièrent leur information à travers ce système de mesure et peuvent confondre les mouvements réels de masses d'épreuve avec le bruit de mesure de l'instrument.

La sensibilité des contrôleurs à diverses sources de perturbation peut être analysée à partir d'un ensemble de fonctions de transfert, donnant le ratio, dans le domaine de Laplace, entre les forces commandées en sortie du contrôleur et les perturbations en question. Ce sont les fonctions de transfert du modèle en boucle fermée. Chaque perturbation intervient en entrée d'un module spécifique du diagramme en bloc (cf. figure 10.20). A ce titre, la sensibilité du contrôleur à des perturbations de nature distincte (bruit de mesure, forces et couples directs) se traduira par une fonction de transfert distincte. Les contrôleurs peuvent ainsi être optimisés de sorte que la sensibilité aux bruits et aux forces perturbatrices soit minimisée tout en préservant au possible les performances de contrôle sur les variables dynamiques.

Lors de la construction des contrôleurs, l'industriel évoque cette optimisation [17] en terme de deux fonctions de réponse en boucle fermée : la fonction de sensibilité et la fonction de sensibilité complémentaire. Ces fonctions dépendent à la fois de la fonction de transfert  $K$  des contrôleurs et de celle du modèle dynamique à contrôler  $G$  augmenté des systèmes d'actuation et de mesure. Les équations 10.13 et 10.14 font intervenir ces deux fonctions de transfert.

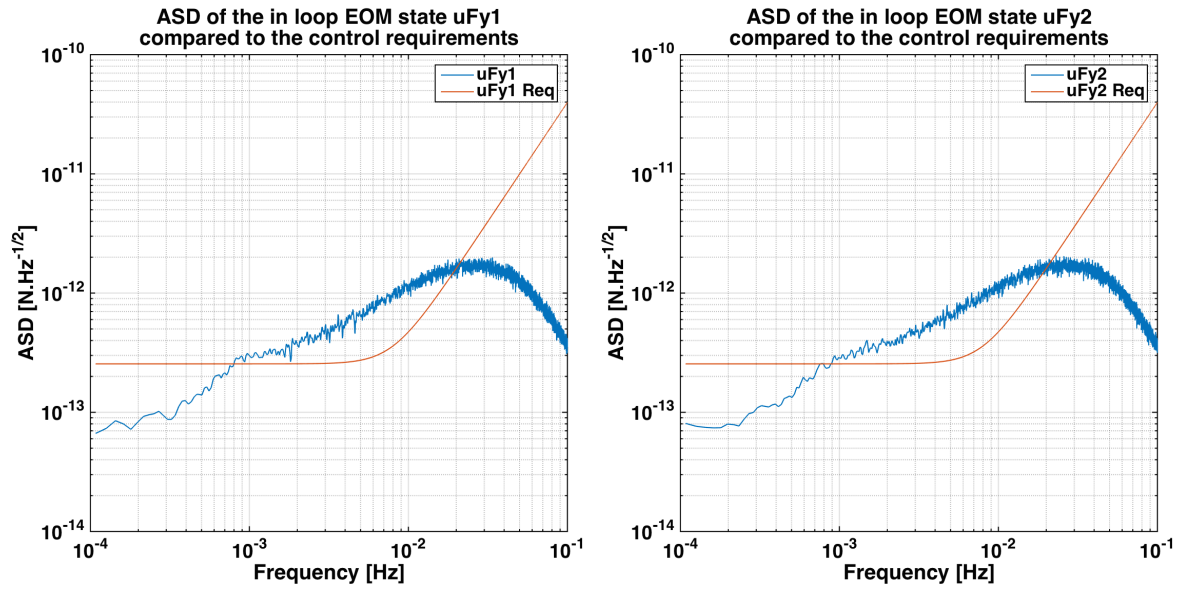


FIGURE 10.15 – Performances de contrôle : comparaison entre les niveaux des forces appliquées par le système d'actuation capacitif **suivant les axes  $\vec{y}_1$  et  $\vec{y}_2$**  et les seuils maximaux recommandés par l'industriel

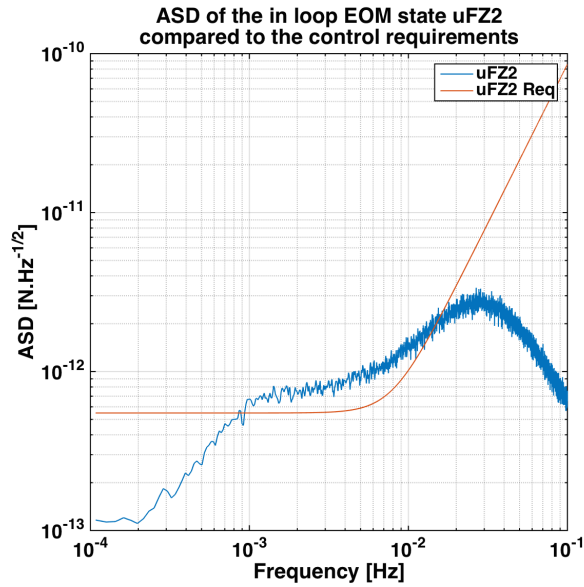


FIGURE 10.16 – Performances de contrôle : comparaison entre les niveaux des forces appliquées par le système d'actuation capacitif **suivant l'axe  $\vec{z}_2$**  (coordonnée  $z_1$  en Drag-Free) et les seuils maximaux recommandés par l'industriel



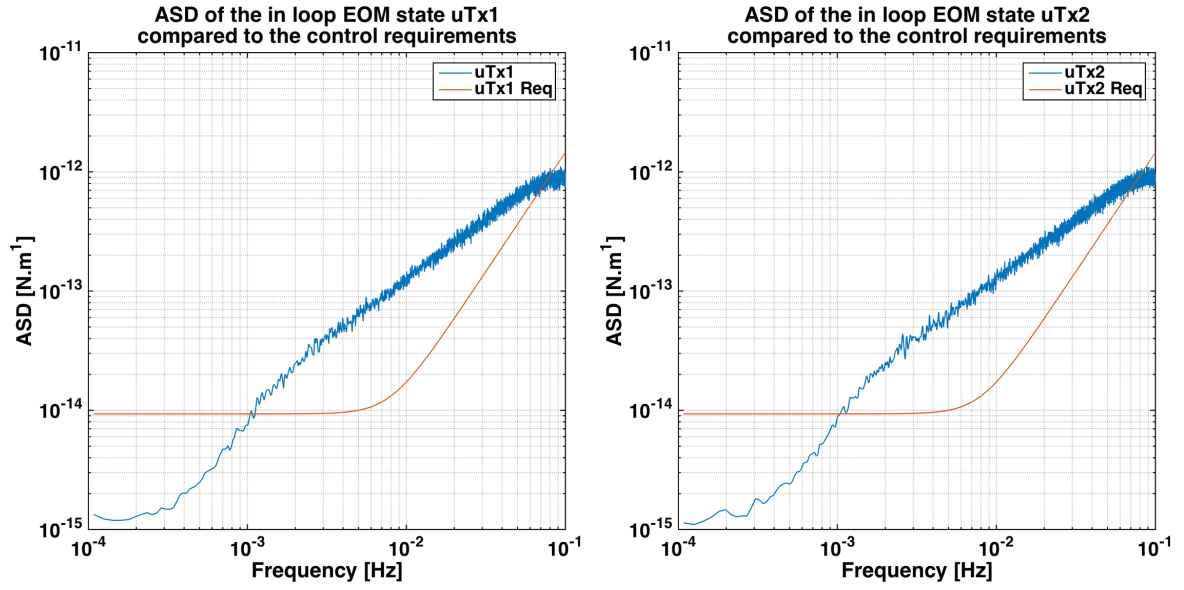


Figure 10.17 – Performances de contrôle : comparaison entre les niveaux des couples appliqués par le système d’actuation capacitif autour des axes  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$  et les seuils maximaux recommandés par l’industriel

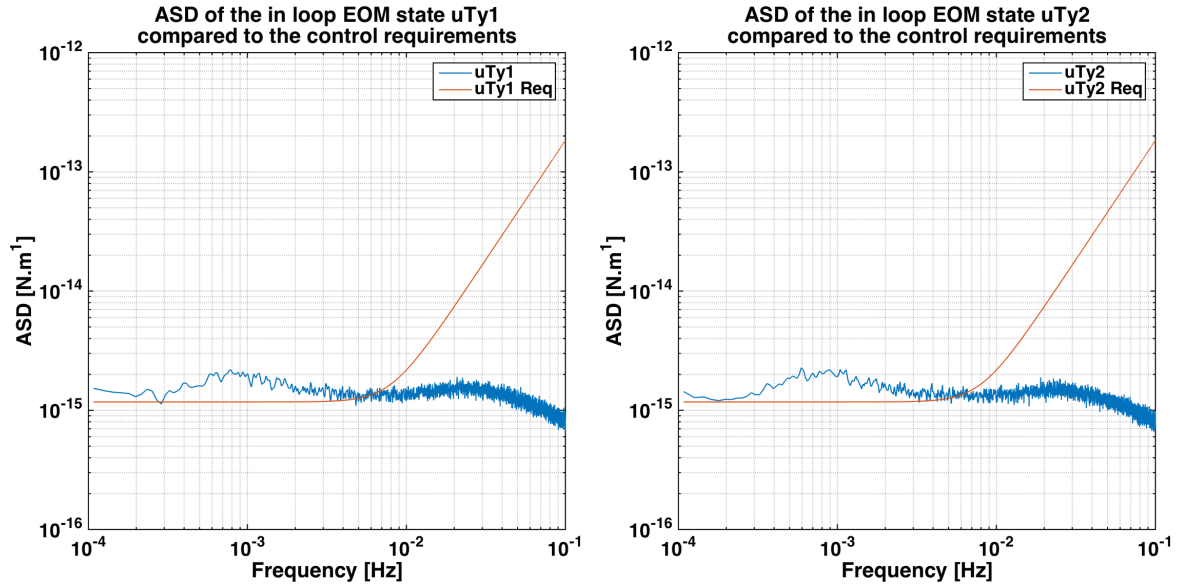


FIGURE 10.18 – Performances de contrôle : comparaison entre les niveaux des couples appliqués par le système d’actuation capacitif **autour des axes  $\vec{y}_1$  et  $\vec{y}_2$**  et les seuils maximaux recommandés par l’industriel

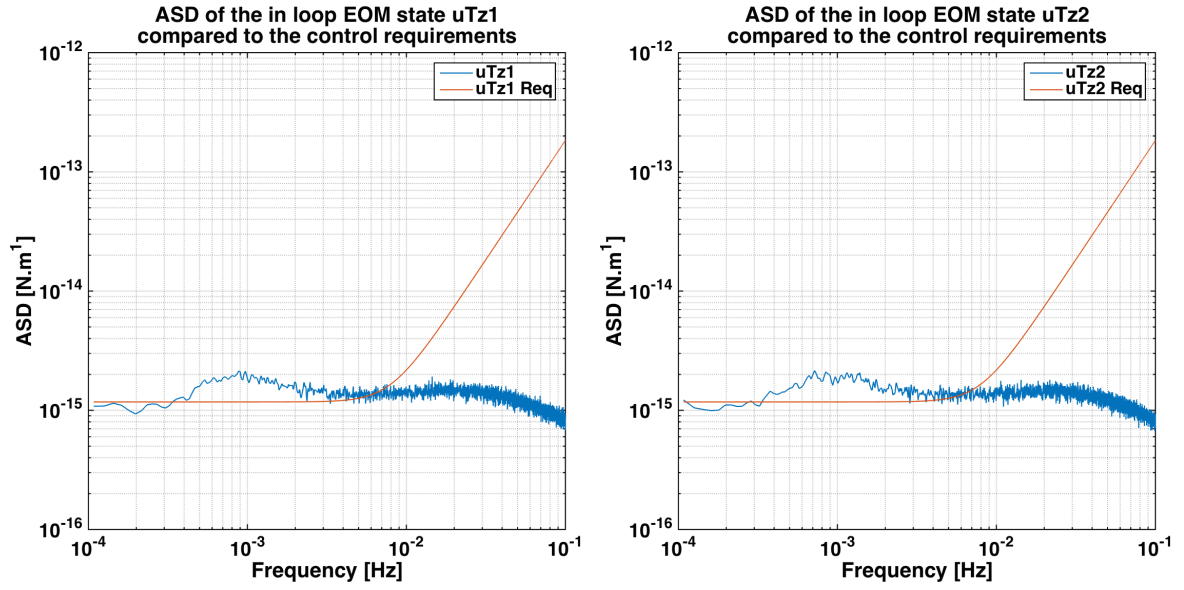


FIGURE 10.19 – Performances de contrôle : comparaison entre les niveaux des couples appliqués par le système d'actuation capacitif **autour des axes  $\tilde{z}_1$  et  $\tilde{z}_2$**  et les seuils maximaux recommandés par l'industriel

$$y(s) = -\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}\eta(s) + \frac{G(s)}{1 + G(s)K(s)}z(s) + \frac{1}{1 + G(s)K(s)}d(s) \quad (10.13)$$

$$u(s) = -\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}z(s) - \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)}\eta(s) - \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)}d(s) \quad (10.14)$$

A partir de ces relations, donnant les mesures et les actuations en boucle fermée en fonction des différentes variables d'entrée du simulateur, on définit les fonctions de sensibilité comme :

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} \quad T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad (10.15)$$

Le gain de ces fonctions de transfert, en particulier la fonction de sensibilité complémentaire  $T(s)$  qui est concernée dans cette discussion, doit respecter un certain nombre de conditions pour par exemple éviter une sensibilité au bruit trop importante, susceptible de se traduire par une réaction exagérée du contrôleur. Les contraintes sur ces fonctions sont données par :

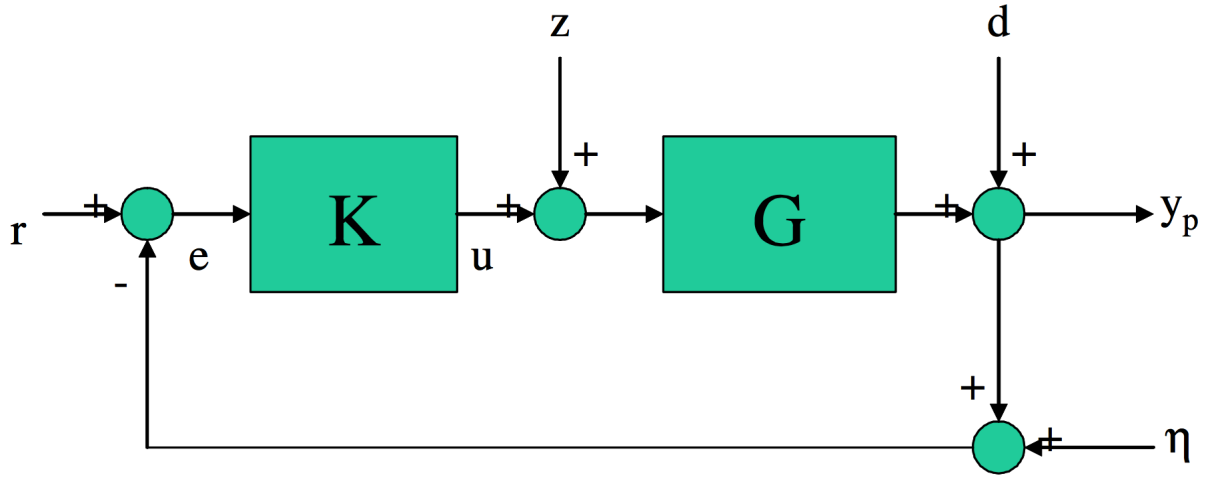


FIGURE 10.20 – Diagramme en bloc simplifié du système en boucle fermée. Le système dynamique  $G$ , augmenté des modèles des senseurs et des actionneurs, est stabilisé par une loi de contrôle  $K$ . Cette figure sert d'illustration pour la sensibilité de la boucle de contrôle en divers signaux perturbateurs que constituent : les forces et couples  $z$  de perturbation directe affectant la dynamique, les perturbations  $d$  sur les variables de sortie du système dynamique (non considérées dans le simulateur) et les bruits de mesure  $\eta$  s'ajoutant aux mesures en sortie de  $G(s)$ . Les signaux  $r$ ,  $e$ ,  $u$  et  $y_p$  correspondent respectivement au signal  $r$  de référence à traquer (dans la simulation ce vecteur est nul), au signal d'erreur  $e$  en entrée des contrôleurs  $K$ , des forces et couples commandés  $u$  par ces derniers, et des mesures  $y_p$  des variables dynamiques du système. Figure tirée de [17]

$$S \leq \frac{y_{req}}{G z_{spec}} \quad T \leq \frac{y_{req}}{\eta_{spec}} \quad (10.16)$$

$$T \leq \frac{G u_{max}}{\eta_{spec}} \quad T \leq \frac{u_{max}}{z_{spec}} \quad (10.17)$$

La première contrainte sur  $S$  est définie pour réduire autant que possible l'impact des forces perturbatrices et des bruits d'actionnement sur l'évolution des variables dynamiques. En ce qui concerne la fonction de sensibilité complémentaire  $T$ , trois contraintes sont exprimées, dont la première assure que le contrôleur n'accroît pas davantage le bruit provenant du système de mesure, la seconde a pour but d'atténuer la sensibilité des forces commandées aux bruits d'actionnement et autres forces perturbatrices, et enfin, la dernière a comme objectif de réduire l'influence du bruit de mesure sur les forces commandées.

Ces contraintes sont construites en terme des exigences et spécifications déjà discutées tout au long de cette partie. Les modèles de bruit et de perturbation considérés ici (respectivement  $\eta^{spec}$  et  $z^{spec}$ ) sont ceux utilisés par le simulateur et présentés au chapitre 8. Les exigences indiquées dans l'équation 10.17, qu'elles concernent les performances atteintes ( $y^{req}$  dans l'équation, cf. section 10.2) ou les niveaux de commande ( $u^{max}$  dans l'équation, cf. section précédente) ont également été discutées.

Dans la figure 10.21, on compare les fonctions de sensibilité  $S$  et  $T$  du simulateur, pour le degré de liberté dynamique  $\theta_1$ , avec les spécifications proposées par l'indus-

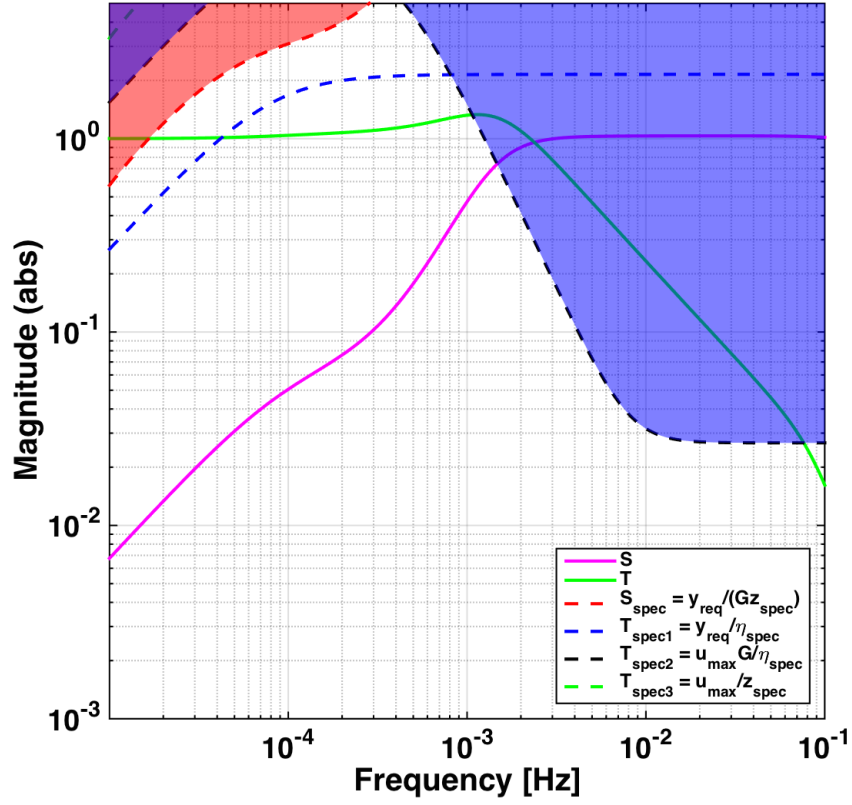


FIGURE 10.21 – Diagramme de Bode des fonctions de transfert de sensibilité  $S$  (en rose) et  $T$  (en vert) du système en boucle fermée concernant le degré de liberté dynamique  $\theta_1$ . L'industriel Airbus Defence & Space préconise des limites supérieures pour ces fonctions de transfert qui sont représentées par des lignes discontinues. En outre, on remarque que la fonction  $T$  se situe dans la zone déconseillée, dessinée en bleu, dans la bande de fréquence  $10^{-3} - 10^{-1}$  Hz. Ce franchissement de la limite supérieure  $T_{\text{spec2}}$  en noir se traduit par une forte sensibilité de la commande de forces et de couples au bruit de la mesure.

triel Airbus Defence & Space. On s'intéresse particulièrement à  $T_{\text{spec2}} = \frac{u^{\text{max}}}{\eta_{\text{spec}}}$ , les autres contraintes étant visiblement respectées (hormis  $T_{\text{spec1}}$ ). Ainsi, on remarque que la fonction  $T$  se situe au delà des spécifications à l'intérieur du domaine de fréquence  $10^{-3}\text{Hz} \leq f \leq 10^{-2}\text{Hz}$ , ce même domaine concerné par les forces commandées trop importantes de la section précédente.

Par l'intermédiaire de cette fonction  $T$ , on a mis en évidence la grande sensibilité des contrôleurs en suspension au bruit des senseurs inertiels, du moins pour la variable dynamique  $\theta_1$ . Ceci montre qu'une manière d'atténuer le niveau de bruit d'accélération à haute fréquence, entraîné indirectement par le bruit des senseurs inertiels, est de reconstruire un ensemble de contrôleurs optimisés de sorte que cette sensibilité soit réduite autant que possible. Néanmoins, gardons à l'esprit que cet effet sur le bruit d'accélération ne se produit que par l'intermédiaire des imperfections du système d'actuation capacitif, et en particulier de la diaphonie. Dans le cas

où ces imperfections se verraient atténuées, la grande sensibilité de la loi de contrôle au bruit de mesure aurait de bien moindres conséquences sur le bruit d'accélération dans le domaine des hautes fréquences.

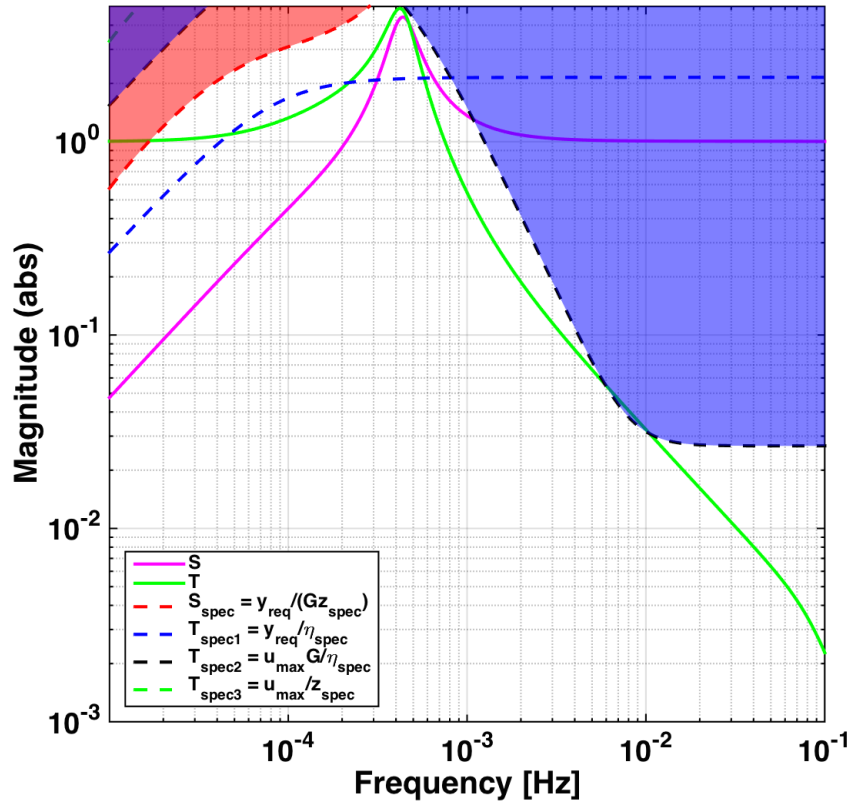


FIGURE 10.22 – Diagramme de Bode des fonctions de transfert de sensibilité  $S$  (en rose) et  $T$  (en vert) du système en boucle fermée concernant le degré de liberté dynamique  $\theta_1$ . Après réduction du gain du contrôleur, la fonction  $T$  se dégage de la zone interdite en bleu, diminuant alors l'influence du bruit de la mesure sur la commande, au détriment cependant d'une hausse des courbes de sensibilité  $S$  et  $T$  autour de la fréquence  $f = 5.10^{-4}\text{Hz}$ , où la fonction  $T$  franchit la limite supérieure  $T_{\text{spec1}}$ . On s'attend donc à observer une sensibilité accrue des performances de contrôle de la variable dynamique  $\theta$  au bruit des senseurs. Une modification plus élaborée du contrôleur est bien entendu nécessaire pour satisfaire l'ensemble des exigences.

On propose alors une première tentative simpliste de modification des contrôleurs. On réduit simplement le gain des contrôleurs de suspension pour le degré de liberté  $\theta$  d'un facteur 7, et on observe l'effet de cette modification sur les fonctions sensibilité et le spectre de bruit d'accélération final. Dans la figure 10.22, on montre les courbes de sensibilité obtenues à partir de cette réduction de gain. On constate que la fonction complémentaire  $T$ , courbe verte continue sur la figure, se maintient à peu près en-deçà de la spécification  $T_{\text{spec2}}$ , celle qui importe particulièrement ici. On réduit donc nettement la sensibilité des actuations capacitatives au bruit de mesure des senseurs inertiels. On réalise néanmoins que c'est au prix d'un dépassement de la spécification  $T_{\text{spec1}}$  entre  $10^{-4}\text{Hz}$  et  $10^{-3}\text{Hz}$  qui indique que dorénavant les perfor-

mances de contrôle se détériorent dans ce domaine de fréquence, l'agitation de la variable dynamique  $\theta$  étant accentuée du fait d'une plus grande sensibilité au bruit de mesure. Cependant, cette perte de performance aura un moindre impact sur le bruit d'accélération auquel est soumise la masse d'épreuve.

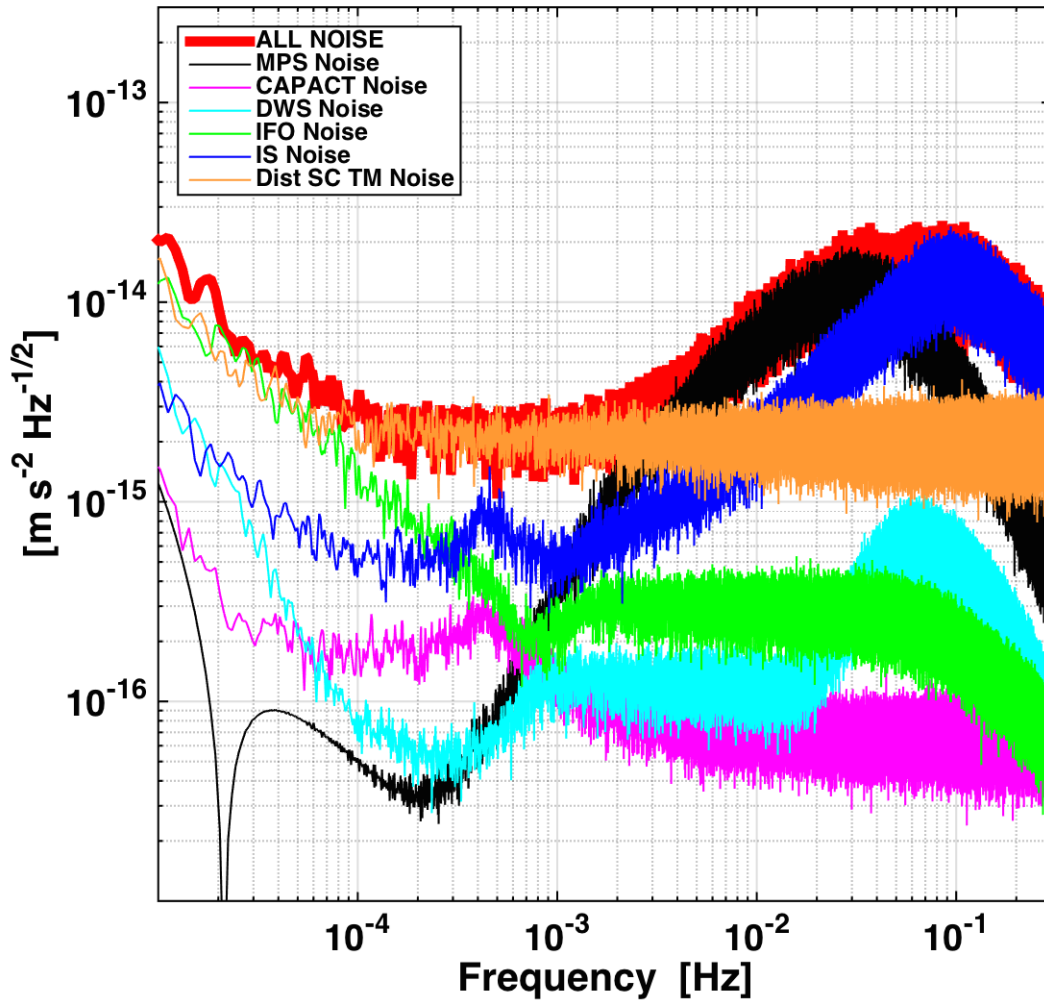


FIGURE 10.23 – Décomposition des contributions de chaque source individuelle de bruit et de perturbation sur le spectre de bruit d'accélération ( $T = 4.10^6$ s, moyenne sur 10 fenêtres temporelles,  $f_s = 10$ Hz, fenêtre de type Blackmann-Harris). Sur cette figure, on réduit le gain des contrôleurs de suspension pour le degré de liberté  $\theta$  d'un facteur 7. Il en résulte une chute de l'influence du bruit des senseurs inertiels à haute fréquence Cette figure doit être comparée aux figures 10.9 et 10.12.

Dans la figure 10.23, on expose une nouvelle décomposition du bruit d'accélération pour une série de simulation incluant cette modification des contrôleurs. On vérifie alors que l'influence du bruit des senseurs inertiels est nettement réduite à haute fréquence, et ce dernier se dispute maintenant la place de contribution domi-

nante avec le bruit du système de micropropulsion. En revanche, on devine également une sensible hausse de son impact à basse fréquence, là-même où l'on avait constaté un dépassement des spécifications de sensibilité, que l'on interprète comme lié aux effets de raideur augmentés par la perte de performance de contrôle sur la variable  $\theta$ . Néanmoins, cette remontée apparaît modeste et le bruit d'accélération dans ce domaine reste clairement dominé par les forces de perturbation directe.

## 10.4.2 Estimation de la matrice de diaphonie du système d'actuation

### Principe de l'actuation capacitive

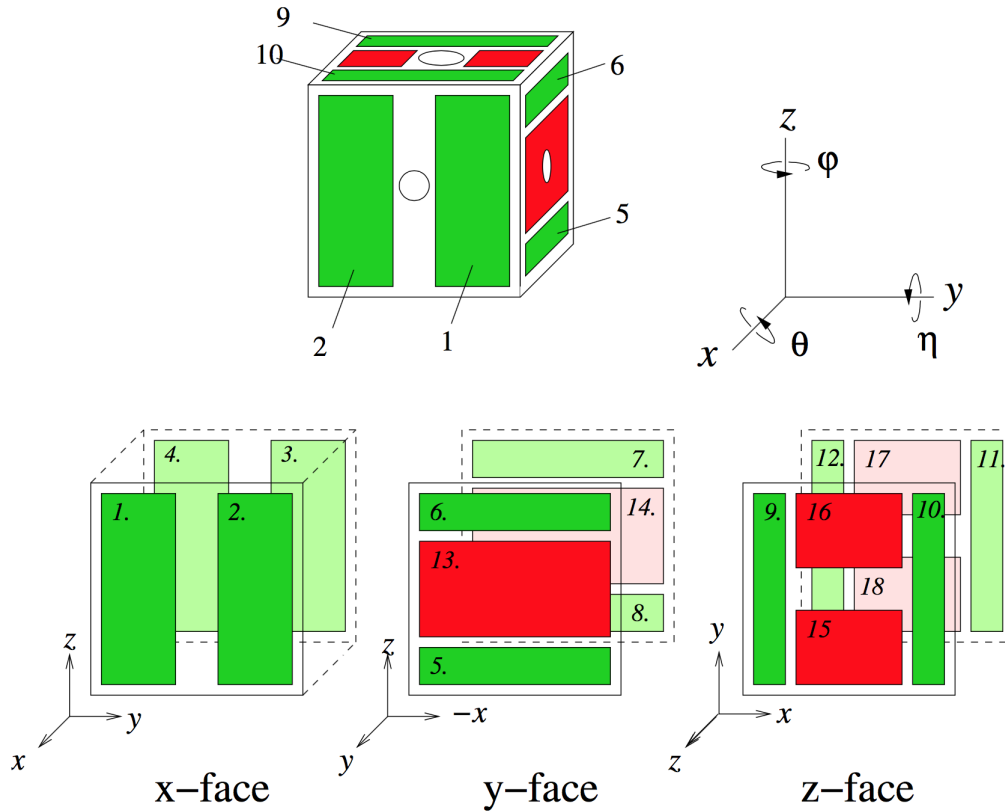


FIGURE 10.24 – Figure illustrant la répartition des électrodes sur les parois du compartiment contenant la masse d'épreuve. Le système d'axe représenté correspond à celui du référentiel  $(H, \vec{e}_{x,H}, \vec{e}_{y,H}, \vec{e}_{z,H})$  associé à chaque compartiment (cf. section 5.1). En haut à gauche est représentée la projection de cette distribution d'électrodes sur les faces de la masse d'épreuve.

Pour obtenir une estimation de la diaphonie du système d'actuation, une analyse plus approfondie de son principe de fonctionnement est nécessaire. L'actuation se base sur un système de capacités  $C_i$  (cf. figure 10.24) dont les armatures sont la  $i$ -ème électrode située sur la paroi intérieure du compartiment de la masse d'épreuve et la surface de cette dernière. La force exercée suivant un degré de liberté  $q$  par le système des capacités  $C_i$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$\langle F_q \rangle = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial C_i}{\partial q} (V_i - V_M)^2 \quad (10.18)$$

Dans cette section, on se place dans la situation nominale où la masse d'épreuve est correctement positionnée et orientée et possède une charge électrique nulle  $Q_M = 0$ . Dans cette approximation, le potentiel électrique au niveau de la masse d'épreuve s'annule ( $V_M = 0$ ). De plus, chaque électrode constitue avec la surface de la masse d'épreuve en regard un système de capacités indépendantes. Dans ce cadre, on considère en particulier l'application de forces et de torques respectivement suivant les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  des compartiments. La figure 10.25 représente la masse d'épreuve observée du dessus (axe  $\vec{z}$  normal à la figure) entourée de quatre électrodes sollicitées à la fois pour l'application de forces suivant  $\vec{x}$  et de couples suivant  $\vec{z}$  (actuation sur l'angle  $\varphi$ ).

$$V_1(t) = -V_{1x} \sin(2\pi f_x t) + V_{2\varphi} \cos(2\pi f_\varphi t) \quad (10.19)$$

$$V_2(t) = +V_{1x} \sin(2\pi f_x t) + V_{1\varphi} \sin(2\pi f_\varphi t) \quad (10.20)$$

$$V_3(t) = +V_{2x} \cos(2\pi f_x t) - V_{1\varphi} \sin(2\pi f_\varphi t) \quad (10.21)$$

$$V_4(t) = -V_{2x} \cos(2\pi f_x t) - V_{2\varphi} \cos(2\pi f_\varphi t) \quad (10.22)$$

Les électrodes sont soumises en permanence à un potentiel sinusoïdal  $V_i$  possédant deux composantes  $V_x$  et  $V_\varphi$  de fréquence distincte  $f_x$  et  $f_\varphi$  (cf. équation 10.22). Ces fréquences sont plus hautes que la fréquence d'échantillonnage  $f_s$  de la boucle de contrôle, avec  $f_x = 30\text{Hz}$  et  $f_\varphi = 270\text{Hz}$ , si bien que l'évolution périodique est quasi-imperceptible par le système qui n'observe qu'un potentiel moyen effectif :

$$\langle V_1^2 \rangle = \frac{1}{2} (V_{1x}^2 + V_{1\varphi}^2) \quad \langle V_2^2 \rangle = \frac{1}{2} (V_{1x}^2 + V_{2\varphi}^2) \quad (10.23)$$

$$\langle V_3^2 \rangle = \frac{1}{2} (V_{2x}^2 + V_{1\varphi}^2) \quad \langle V_4^2 \rangle = \frac{1}{2} (V_{2x}^2 + V_{2\varphi}^2) \quad (10.24)$$

Les amplitudes maximales de ces composantes se déclinent sous deux variantes,  $V_{1x}$  et  $V_{2x}$  pour les composantes linéaires et  $V_{1\varphi}$  et  $V_{2\varphi}$  pour les composantes angulaires, attribuées à chaque électrode de sorte que :

- Un déséquilibre entre  $V_{1x}$  et  $V_{2x}$  engendre une force suivant l'axe  $\vec{x}$ . En effet, dans le cas d'une masse centrée correctement orientée, la force appliquée suivant  $\vec{x}$  s'écrit :

$$\langle F_x \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial C_{1-2}}{\partial x} (2V_{1x}^2 + V_{1\varphi}^2 + V_{2\varphi}^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial C_{3-4}}{\partial x} (2V_{2x}^2 + V_{1\varphi}^2 + V_{2\varphi}^2) \quad (10.25)$$

En remarquant que la géométrie implique que  $\frac{\partial C_{1-2}}{\partial x} = -\frac{\partial C_{3-4}}{\partial x}$  pour une masse centrée :



$$\langle F_x \rangle = \frac{\partial C_{1-2}}{\partial x} (V_{1x}^2 - V_{2x}^2) \quad (10.26)$$

- Un déséquilibre entre  $V_{1\varphi}$  et  $V_{2\varphi}$  produit un couple autour de l'axe  $\vec{z}$ . Cette fois-ci sont appliqués des potentiels distincts  $V_{1\varphi}$  et  $V_{2\varphi}$  sur les électrodes d'une même face. Les électrodes croisées de part et d'autres de la masse d'épreuve sont en revanche soumises au même potentiel. Une nouvelle fois, si la masse d'épreuve est centrée et bien orientée, les points d'application de ces forces sont symétriques par rapport au centre de la masse et le déséquilibre de l'amplitude des forces appliquées sur chacune des faces produit un couple pur dont l'intensité est la suivante :

$$\langle T_z \rangle = \frac{\partial C_{1-3}}{\partial \varphi} (V_{1\varphi}^2 - V_{2\varphi}^2) \quad (10.27)$$

Bien sûr, ce schéma de principe n'est valable en toute rigueur que si la masse d'épreuve est dans sa position nominale, c'est-à-dire parfaitement centrée et orientée dans son compartiment. Bien que la boucle de contrôle s'efforce à réaliser un tel positionnement de la masse, tout écart à cette position de consigne, mais aussi certains défauts géométriques, affectent la valeur des capacités et introduisent des imperfections dans le système d'actuation, en particulier des forces de raideur et de la diaphonie. De même, des imprécisions sur le potentiel appliqué sur chaque électrode sont également susceptibles d'engendrer de la diaphonie d'actuation.

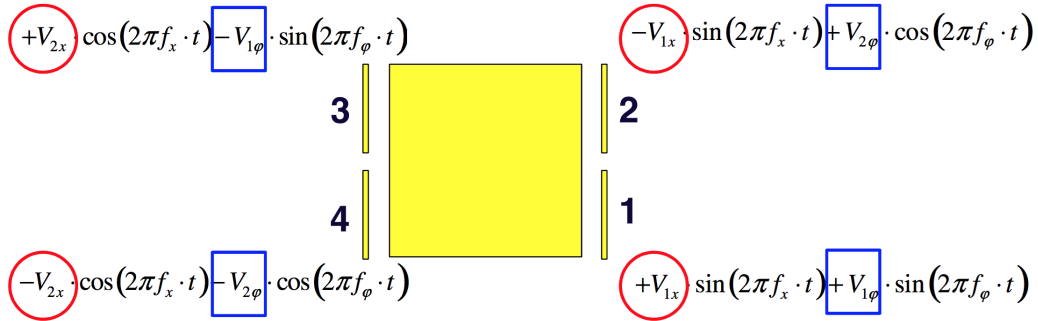


FIGURE 10.25 – Représentation en coupe de la masse d'épreuve entourée par les électrodes. La surface visible de la masse correspond à la face Z de la figure 10.24 (axe  $\vec{z}$  orthogonal à la figure). Les électrodes représentées s'occupent de la translation suivant  $\vec{x}$  et de la rotation autour de  $\vec{z}$  de la masse, en appliquant un potentiel sinusoïdal sur chaque électrode dont on distingue une composante pour chaque degré de liberté concerné. Le déséquilibre des potentiels  $V_{1x}$  et  $V_{2x}$  crée une force suivant l'axe  $\vec{x}$  quand le déséquilibre des potentiels  $V_{1\varphi}$  et  $V_{2\varphi}$  crée un couple autour de l'axe  $\vec{z}$ .

## Diaphonie d'actuation

Les quatre électrodes sollicitées pour l'actuation peuvent présenter des défauts de gain, différant les uns des autres et provoquant alors un déséquilibre non-maîtrisé des potentiels. Les amplitudes de potentiel  $V_{1\varphi}$  et  $V_{2\varphi}$  se voient alors différées d'une électrode à l'autre par les différents gains de ces dernières. On voit donc apparaître

dans l'expression de la force  $\langle F_x \rangle$  les potentiels  $V_{1\varphi}$  et  $V_{2\varphi}$  appliqués pour l'actuation angulaire, lesquels dans le cas idéal n'interviennent que dans l'expression du couple  $\langle T_z \rangle$ . Cette influence des potentiels  $V_{1\varphi}$  et  $V_{2\varphi}$  peut s'interpréter comme une fuite d'une partie du couple  $\langle T_z \rangle$  vers la force  $\langle F_x \rangle$ . L'élément de diaphonie transformant des couples appliqués autour de l'axe  $\vec{z}$  en des forces selon l'axe  $\vec{x}$  peut s'exprimer par l'intermédiaire de la dérivée partielle suivante [3] :

$$\chi_{\varphi \rightarrow x} = \left\langle \frac{\partial F_x}{\partial T_z} \right\rangle \quad (10.28)$$

Dans ce document [3], il est indiqué que les erreurs de gains des électrodes donnent une contribution largement majoritaire sur la diaphonie d'actuation  $\varphi \rightarrow x$ . En fait, ce type d'imperfection implique la même conséquence sur chacune des faces, provoquant d'importantes diaphonies entre les actuations linéaires et angulaires sollicitant un jeu d'électrodes commun ( $\theta \rightarrow y$ ,  $\eta \rightarrow z$ ,  $\varphi \rightarrow x$ ). En revanche, il n'explique pas la diaphonie  $\theta \rightarrow x$ , à laquelle on s'intéresse ici, et qui possède dans la version standard du simulateur une valeur d'ordre comparable à  $\chi_{\varphi \rightarrow x}$ . Pour produire une telle diaphonie, l'action conjointe et successive de deux imperfections est nécessaire, la première correspondant aux différences de gain dont on vient de discuter et la seconde invoquant des défauts géométriques du système qui se traduisent par de la diaphonie d'un degré de liberté linéaire vers un autre.

La valeur prise de la capacité  $C_i$  dépend de la distance entre l'électrode et la surface de la masse qui lui fait face. Cependant, de manière générale, les armatures de ces capacités ne sont pas parallèles. D'une part, les masses d'épreuve sont soumises à des déplacements angulaires dans leur compartiment. D'autre part, les imperfections géométriques observées par les parois internes des compartiments et par la masse d'épreuve contribuent également à ce non-parallélisme. Malgré l'absence de parallélisme entre les électrodes et la surface de la masse en regard, le champ électrique reste orthogonal à cette surface, si bien que la force  $\vec{F}_{cmd} = F\vec{y}$  commandée par une électrode suivant  $\vec{y}$  se traduit en réalité par une légère composante  $F \sin \varphi$  dirigée vers  $\vec{x}$ . La figure 10.26 illustre un tel mécanisme, en se concentrant exclusivement sur les déplacements angulaires de la masse d'épreuve, mais les imperfections géométriques de la masse d'épreuve interviennent de manière comparable.

On interprète donc la diaphonie  $\theta \rightarrow x$  comme provenant de l'action successive de ces deux mécanismes. Dans un premier temps, l'importante diaphonie  $\theta \rightarrow y$  produit des actuations parasites suivant  $\vec{y}$  dont l'amplitude est par définition proportionnelle aux actuations angulaires  $\langle T_z \rangle$ . Ensuite, le parallélisme imparfait des faces  $X$  de la masse d'épreuve ou l'écart angulaire  $\varphi$  à l'orientation de consigne transforme les actuations  $\langle F_y \rangle$  d'origine diaphonique en une force suivant l'axe  $\vec{x}$ .

Le fait de nécessiter une succession de deux phénomènes distincts rend la diaphonie  $\theta \rightarrow x$  très faible relativement à la diaphonie angulaire dominante  $\varphi \rightarrow x$ . Or, dans le simulateur, ces deux paramètres de diaphonie prennent des valeurs du même ordre de grandeur ( $\chi_{\varphi \rightarrow x} = 0,4m$  et  $\chi_{\theta \rightarrow x} = 0,2m$ ). En effet dans le document de l'industriel *Airbus Defence & Space* [3], il est indiqué que les seuls éléments de

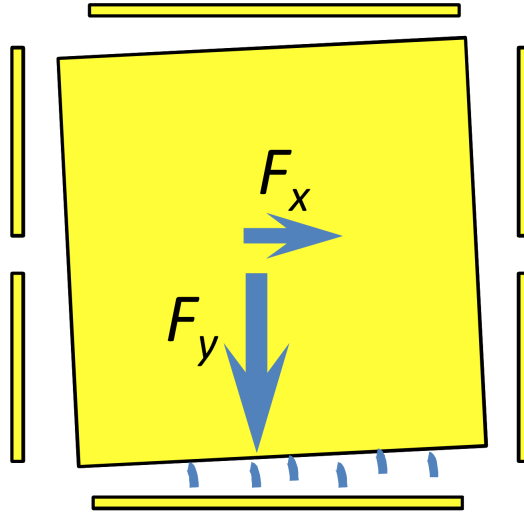


FIGURE 10.26 – Représentation en coupe de la masse d'épreuve entourée par les électrodes. La surface visible de la masse correspond à la face  $Z$  de la figure 10.24 (axe  $\vec{z}$  orthogonal à la figure). Lorsque la masse d'épreuve n'est pas orientée nominalement dans son compartiment ( $\varphi \neq 0$ ), les capacités utilisées pour exercer une force de pression suivant l'axe  $\vec{x}$  sont responsables de l'apparition d'une composante significative de la forces suivant  $\vec{y}$ .

diaphonie susceptibles d'avoir un impact significatif suivant  $\vec{x}$  sont ceux invoquant des forces suivant  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  et le couple agissant sur  $\varphi$ , et donne l'ordre d'estimation de  $\chi_{\theta \rightarrow x} \approx 10^{-5}\text{m}$  (l'estimation plus précise  $\chi_{\theta \rightarrow x} = 7,67 \cdot 10^{-5}\text{m}$  est donnée dans [16]). On rappelle que ces estimations sont tirées de l'expérience *LPF*. Néanmoins, l'industriel décide de largement surestimer l'élément de diaphonie  $\chi_{\theta \rightarrow x}$  afin d'étudier l'impact de ces effets de second ordre et considère en particulier que  $\chi_{\theta \rightarrow x} = \frac{1}{2}\chi_{\varphi \rightarrow x}$ . Un travail de simulation est en cours au laboratoire APC pour fournir une estimation plus précise de l'amplitude de ces diaphonies.

# Chapitre 11

## Vers une version plus quantitative du simulateur : études expérimentales des forces de perturbation et des bruits instrumentaux

Jusqu'à présent, les ingrédients considérés en entrée du simulateur, essentiellement les bruits de mesure et d'actuation et les forces perturbatrices directes, ont été tirés de la documentation technique de l'industriel *Airbus Defence & Space* en charge de la conception et de la réalisation du satellite. Cette documentation est en particulier associée au développement d'un simulateur "end-to-end", gardée privée par l'industriel, dont l'un des objectifs principaux a été la conception des lois de contrôle, également non distribuées à la communauté scientifique, permettant de stabiliser le système en respectant les exigences de performance que la mission *eLISA* nécessite. Ainsi, un certain nombre d'ingrédients de ce simulateur relève plus de spécifications de conception plutôt que de caractérisations expérimentales tentant de décrire fidèlement le comportement de chacun des instruments et des sources de bruit. Si l'industriel a bien entendu interagi avec la communauté scientifique et intègre certains des résultats expérimentaux présentés par la suite, il est souvent difficile de distinguer dans les documents techniques à disposition les informations issues de spécifications de celles issues de caractérisations expérimentales, et en particulier de déceler la présence d'un certain nombre de marges. Dans ce chapitre, on construira une version du simulateur dont le budget de bruit s'appuie sur les études expérimentales les plus récentes, ayant si possible fait l'objet de publications scientifiques. A cet effet, le chapitre s'organisera en suivant la publication [15] de la collaboration *LPF* présentant l'état de l'art du budget de bruit de *LPF* en 2011, supporté à la fois par des modèles physiques et des caractérisations expérimentales, et proposant également un certain nombre d'hypothèses quant à l'extrapolation du budget à la mission *eLISA*.

## 11.1 Budget de bruit : modèle de décomposition et caractérisation expérimentale

### 11.1.1 Forces de perturbation directes

Dans les sections 8.4.1 et 8.3.2, on a répertorié l'ensemble des sources de forces perturbatrices connues à ce jour s'exerçant directement sur les masses d'épreuve. Dans la présente section cette fois-ci, on décrira de manière plus approfondie l'origine de ces forces et leur contribution attendue dans *LPF* sur le bruit d'accélération subi par les masses d'épreuve. On ne considère ici que les forces s'appliquant directement sur les masses d'épreuve. Toutes autres sources indirectes, c'est à dire agissant par l'intermédiaire de la dynamique des masses d'épreuve et du satellite, sont de fait étudiées par le simulateur.

- Les forces parasites dites **browniennes**, résultats de l'amortissement de la masse d'épreuve par le gaz résiduel inévitablement présent à l'intérieur du compartiment. La proximité des parois de l'enceinte à la surface de la masse d'épreuve, du moins en comparaison de la taille de cette masse, ( $\approx 3 - 4\text{mm}$ ) tend à amplifier ce phénomène [6] [15]. L'amplitude de ce bruit se comporte linéairement avec la pression résiduelle dans l'enceinte. La mise en contact de l'enceinte avec le vide interplanétaire permet d'atteindre des pressions de l'ordre de  $10^{-7}\text{Pa}$ , ce qui permet d'atténuer significativement cette source de bruit. Un modèle de cette source de bruit a été développé par la collaboration *LPF* [5]. Des études expérimentales pratiquées sur un prototype de *GRS* et une réplique creuse de la masse d'épreuve ont été réalisées à l'aide d'un pendule de torsion [6] et apparaissent en bon accord avec les modèles théoriques. Au final, il en résulte un bruit d'accélération blanc et d'amplitude  $\approx 1, 3 \cdot 10^{-15} \text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2}$ .
- Les forces d'origine **magnétique** appliquées sur la masse d'épreuve dont la susceptibilité magnétique statique est estimée à  $\chi_B = 2.5e-5$  [15]. La fluctuation du champ magnétique environnant la masse d'épreuve induit à travers sa susceptibilité une force appliquée variable pouvant se révéler importante à basse fréquence. Trois origines principales sont considérées pour ce champ fluctuant : le couplage entre le champ interplanétaire et le champ statique émis par le satellite, les fluctuations du champ magnétique originaire de l'environnement proche de la masse d'épreuve (composants électroniques) ainsi que les fluctuations du gradient de ce champ. Les trois contributions ont été étudiées expérimentalement par l'industriel *Airbus Defence & Space* et leur comportement fréquentiel a été observé. La contribution d'origine interplanétaire voit son influence croître en  $\frac{1}{f^{3/2}}$  en puissance quand les contributions d'origine locale ne semblent pas augmenter plus rapidement qu'en  $\frac{1}{f}$  [15]. Concernant les niveaux de bruit à haute fréquence, des modèles analytiques utilisés dans *LPF* (classe `LPFContributionData` de la boîte à outils *LTPDA*) ont été considérés. Au total, le niveau de bruit d'accélération cor-

respondant est estimé à  $\approx 1,4 \cdot 10^{-15} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 1 \text{ mHz}$  et  $\approx 7,7 \cdot 10^{-15} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 0,1 \text{ mHz}$ .

- Les forces d’origine **électrostatique** dues à l’interaction entre la charge électrique de la masse d’épreuve et des champs électrostatiques résiduels parasites présents dans son enceinte. La fluctuation de ce champ parasite se couple avec la charge moyenne de la masse d’épreuve et se rend, par conséquent, responsable d’une force variable appliquée sur la masse d’épreuve. Une combinaison de particules cosmiques galactiques et de particules solaires interagissent soit directement avec la masse d’épreuve, en libérant ou déposant des charges électriques, soit indirectement par création de particules chargées secondaires issues de l’interaction avec le reste du satellite. Le taux de charge effectif  $\lambda_{eff}$  de la masse est estimé autour de  $300 \text{ e/s}$  [39], ce qui conduit à une accumulation de charge moyenne en un jour de l’ordre de  $10^7 \text{ e}$ . Un procédé d’illumination UV de la masse d’épreuve permet de maîtriser cette charge électrostatique par décharge périodique, le nombre de charges  $10^7 \text{ e}$  étant de l’ordre du seuil de décharge rendu possible par le dispositif [15]. L’article [2] expose une analyse des forces induites par les différences de potentiel parasites dans l’enceinte électrostatique. Il propose un modèle analytique valable pour une faible charge électrique de la masse d’épreuve et présente des mesures expérimentales réalisées sur un pendule de torsion du déséquilibre des potentiels et de son interaction avec la charge de la masse. La fluctuation de ce déséquilibre de potentiel se couple à la charge moyenne de la masse d’épreuve pour induire un bruit d’accélération. L’article [2] dégage la limite supérieure  $S_{\Delta_x} = 100 \mu\text{V Hz}^{-1/2}$  concernant la fluctuation de ce déséquilibre à haute fréquence, et on considère une dépendance en  $\frac{1}{f^3}$  à basse fréquence (fréquence de coupure  $f_c \approx 0,4 \text{ mHz}$ , cf. figure 11.1). Il en résulte un bruit d’accélération d’environ  $\approx 4,6 \cdot 10^{-16} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 1 \text{ mHz}$  et de  $\approx 2,2 \cdot 10^{-15} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 0,1 \text{ mHz}$ .
- **La charge électrostatique aléatoire** de la masse d’épreuve, reflet des processus stochastiques de production de charge. En s’appuyant une nouvelle fois sur l’article [2], on considère un déséquilibre statique des potentiels  $\Delta_x \approx 10 \text{ mV}$  et un bruit de charge poissonnien de la masse  $S_q = \frac{2e^2 \lambda_{eff}}{2\pi f^2}$ . On obtient une accélération résiduelle de  $\approx 2,8 \cdot 10^{-17} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 1 \text{ mHz}$  et de  $\approx 2,8 \cdot 10^{-16} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 0,1 \text{ mHz}$ , admettant ainsi une progression en  $\frac{1}{f^2}$  en puissance.
- **La pression de radiation exercée par le laser** du dispositif interférométrique réfléchi sur la masse d’épreuve. La puissance fluctuante du laser entraîne un bruit d’accélération sur la masse réfléchissante. Une campagne d’essais en environnement spatial artificiel (campagne On Station Thermal Tests (*OSTT*)) a fourni la meilleure caractérisation expérimentale à ce jour du système d’interférométrie. Elle a permis notamment de caractériser le bruit

---

1. On note qu’une telle performance implique la mesure et la compensation de ce déséquilibre en vol [2].

d'intensité relative du laser [1] qui est apparu de l'ordre de  $RIN \approx 2.10^{-5}$  à la fréquence  $f = 1\text{mHz}$  avec un comportement en  $\frac{1}{f}$  en puissance pour une puissance nominale du laser de  $1\text{mW}$ . Le bruit d'accélération qui en résulte est estimé à  $\approx 6,8.10^{-17}\text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 1\text{mHz}$  et  $\approx 2,2.10^{-16}\text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 0,1\text{mHz}$ .

- **Des effets d'origine thermique** impliquant le gradient de température à l'intérieur de l'enceinte et se déclinant essentiellement en trois phénomènes physiques distincts. D'abord, *l'effet radiométrique* apparaît en raison du faible gradient de pression qu'implique le gradient de température à l'équilibre dans l'enceinte. En effet, ce gradient de température induit un déséquilibre dans l'impulsion transmise par les molécules du gaz résiduel de part et d'autre de la masse d'épreuve [4]. Ensuite, le gradient de température entraîne également une anisotropie de l'intensité du rayonnement thermique dans l'enceinte et une *pression de radiation thermique* s'exerce alors sur la masse d'épreuve. Enfin, le *dégazage* des parois de l'enceinte électrostatique, phénomène dépendant de la température de la paroi en question, implique un flux asymétrique de particules en présence d'un gradient de température, ce qui se traduit une nouvelle fois par l'application de forces de pression fluctuantes sur la masse d'épreuve. L'article [4] présente ces phénomènes plus en détail et propose une modélisation des forces appliquées sur la masse d'épreuve qui en résultent. Les modèles sont mis à l'épreuve et ajustés à l'occasion d'une campagne de mesures également discutée dans la publication. Finalement, ces modèles permettent d'estimer un bruit d'accélération à hauteur de  $\approx 1,9.10^{-16}\text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 1\text{mHz}$  et  $\approx 1,9.10^{-15}\text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 0,1\text{mHz}$ , traduisant un comportement en  $\frac{1}{f^2}$  en puissance.
- **La fluctuation du champ gravitationnel produit par le satellite** lui-même. Elle est causée par la fluctuation de la température du satellite durant les opérations, entraînant des phénomènes de dilatation du corps et par suite, une modification du champ gravitationnel au niveau de la masse d'épreuve. Une campagne de simulation réalisée par l'industriel *Airbus Defence & Space* a permis d'obtenir une estimation du spectre des fluctuations du champ gravitationnel, sur laquelle on base l'hypothèse de comportement en  $\frac{1}{f^2}$  en puissance [15]. Le bruit d'accélération correspondant est évalué à  $\approx 1,8.10^{-16}\text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 1\text{mHz}$  et  $\approx 1,8.10^{-15}\text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 0,1\text{mHz}$ .
- **Le bruit des actionneurs capacitifs** qui exercent une force directe sur la masse d'épreuve. Le niveau de bruit dépend du niveau de l'actionnement demandée. Dans *LPF*, les masses d'épreuve sont soumises à des forces continues, en particulier générées par le champ de gravitation émis par le satellite. Il est donc nécessaire de compenser ces forces par l'intermédiaire d'une actionnement continue du système capacitif [15], du moins sur la masse d'épreuve numéro 2. Dans *eLISA*, le même effet est rencontré, à la différence que les axes  $\vec{x}$  sont contrôlés via le système *Drag-Free*, si bien qu'aucune force suivant ces axes n'est exercée sur les masses d'épreuve afin de compenser le champ de gravité

résiduel du satellite. En revanche, suivant les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ , c'est bien le système capacitif qui se charge de cette compensation. Il existe dans *LPF* un mode particulier du système de contrôle permettant d'estimer le bruit d'accélération résiduel en l'absence d'actuation suivant l'axe sensible  $\vec{x}$  : c'est le mode "*Free Flight*". Dans ce mode, la masse d'épreuve numéro 2 est épargnée du contrôle électrostatique durant un certain laps de temps (quelques centaines de secondes), après lequel une impulsion électrostatique ramène la masse à sa position initiale. Durant ce vol parabolique de la masse d'épreuve, le contrôle électrostatique angulaire est néanmoins maintenu. On estime que le bruit d'accélération qui s'exerce sur la masse par l'imprécision du système capacitif est de  $\approx 1.7 \cdot 10^{-14} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 0,1 \text{ mHz}$  pour le mode nominal de fonctionnement, tandis qu'il atteindrait  $\approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2}$  à la même fréquence pour le mode "*Free Flight*". Dans *eLISA*, ce dernier niveau de bruit s'applique en ce qui concerne les degrés de liberté en *Drag-Free*  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$ . A basse fréquence, on estime que le niveau de bruit se comporte en  $1/f$  en puissance, compte tenu des caractéristiques d'instabilité observées de l'électronique associée [15].

Tous les modèles présentés ci-dessus et intégrés au simulateur sont disponibles dans la boîte à outils *LTPDA* [27] par l'intermédiaire de la classe `LPFContributionData`<sup>2</sup>. La figure 11.1 résume cette décomposition. On remarque alors l'influence dominante du bruit d'origine magnétique, et à basse fréquence, du bruit engendré par les différences de potentiel parasites. On note par ailleurs que tous ces modèles seront mis à l'épreuve lors de la mission LISA Pathfinder, dont le but est à la fois de mesurer le bruit d'accélération résiduel entre les masses d'épreuve et d'observer toutes les quantités physiques nécessaires à l'évaluation de ces modèles. On pourra alors vérifier si la somme de ces contributions est suffisante pour expliquer le niveau de bruit d'accélération observé ou dans, le cas contraire, évaluer le niveau du bruit d'accélération résiduel de nature encore méconnue.

### 11.1.2 Modèle de bruit des actuateurs et des senseurs

En ce qui concerne le bruit des senseurs et des actuateurs, de multiples campagnes de caractérisation ont été menées par les divers acteurs de la collaboration. Les modèles de bruit présentés ici s'inspirent des modèles développés au sein de la classe `LPFContributionData` et des niveaux de bruit observés lors des campagnes de mesure les plus récentes.

---

2. On note que certains d'entre eux ont du être adaptés pour s'accorder avec les campagnes de mesure correspondantes à disposition. C'est le cas par exemple de la pression de radiation laser, où le niveau de bruit issu du modèle ne semble pas conforme aux conclusions de [1].



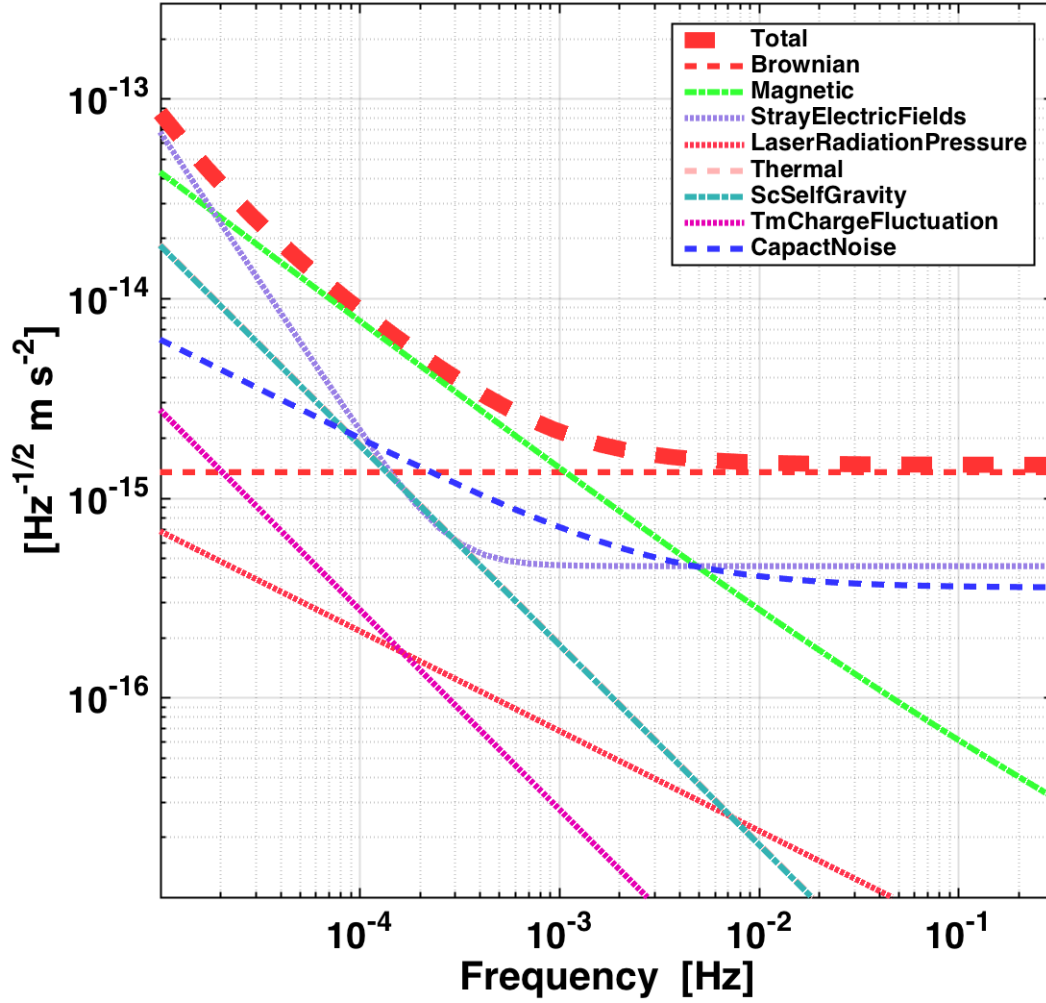


FIGURE 11.1 – Décomposition des diverses contributions au spectre des forces directes appliquées sur une masse d'épreuve.

### Modèle de bruit du senseur interférométrique

Dans le cadre de la campagne de mesure *OSTT* mentionnée en section 11.1.1, les performances du système interférométrique ont été étudiées dans des conditions d'environnement représentatives des futures opérations [26]. Les sensibilités linéaires et angulaires du senseur ont été caractérisées, démontrant des niveaux de bruit à haute fréquence de  $n_x \approx 5 \text{ pm Hz}^{-1/2}$  suivant l'axe  $\vec{x}$  et de  $n_\eta \approx n_\phi \approx 1 \text{ nrad Hz}^{-1/2}$  suivant les degrés de liberté angulaires. A basse fréquence, à partir de la fréquence  $f = 1 \text{ mHz}$ , les performances se dégradent rapidement, mais sont à attribuer aux conditions expérimentales en laboratoire, lesquelles ne favorisent pas ces études à très basse fréquence [15]. Dans ce domaine de fréquence, seules des mesures en vol

permettront d'attester des performances du senseur, alors à l'abri de toutes vibrations basse fréquence difficilement contournables en laboratoire. La publication [15] prédit néanmoins une tendance en  $1/f$  en puissance, qui se retrouve dans le modèle de la classe `LPFContributionData` concernant les performances des senseurs optiques.

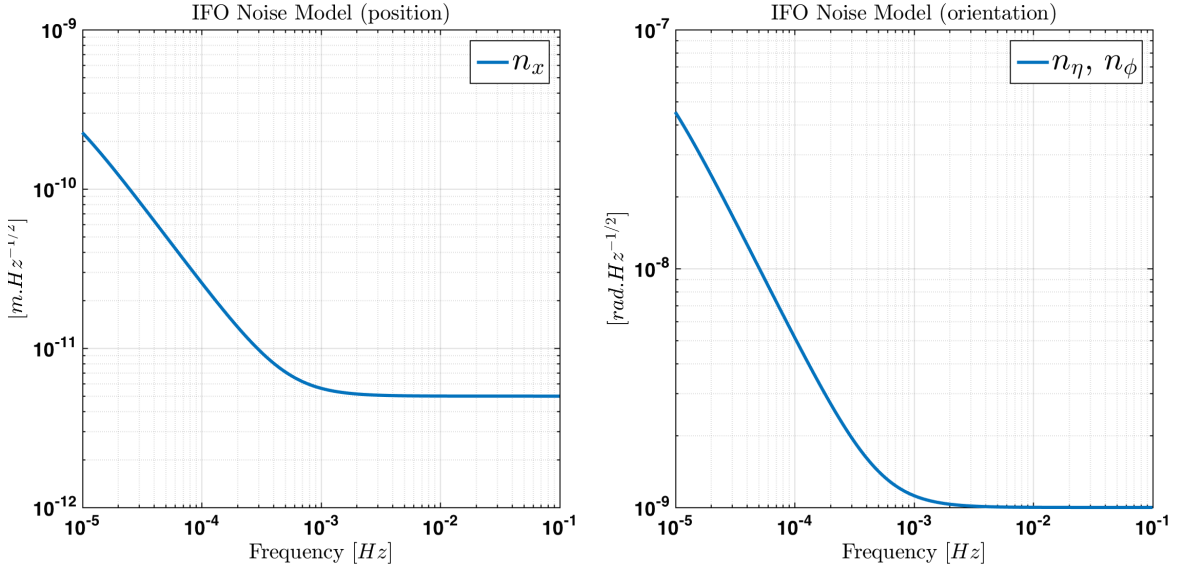


FIGURE 11.2 – Fonctions de transfert du modèle de bruit du système de mesure IFO. **A gauche :** Niveau de bruit pour la mesure du déplacement des masses d'épreuve suivant l'axe  $\vec{x}$ . **A droite :** Niveau de bruit pour la mesure des déplacements angulaires  $\eta$  et  $\phi$  des masses d'épreuve (rotation respectivement autour des axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ ). Modélisation adaptée des résultats de la campagne de mesure OSTT présentées dans la publication [26].

## Modèle de bruit des senseurs inertiels

Les senseurs capacitifs surveillent également l'ensemble des degrés de liberté dynamiques de la masse d'épreuve, bien que seuls les degrés de liberté non observés par l'interféromètre alimentent le système de contrôle. La valeur de chaque capacité, formée par chacune des électrodes sur les parois de l'enceinte et la surface de la masse en regard, dépend de la distance entre les armatures ainsi constituées. La disposition des électrodes permet l'observation de tous les degrés de liberté dynamiques. L'industriel Compagnia Generale per lo Spazi (*CGS*) en charge du dispositif a démontré la capacité du système capacitif à remplir les exigences initiales, en particulier une sensibilité en position de  $1,8 \text{ nm Hz}^{-1/2}$ , en observant un niveau de bruit de lecture des capacités de l'ordre de  $1 \text{ aF Hz}^{-1/2}$  [42] entre  $f = 1 \text{ mHz}$  et  $f = 1 \text{ Hz}$ . Pour le comportement à basse fréquence, on utilise une nouvelle fois la modélisation correspondante disponible dans `LPFContributionData`.

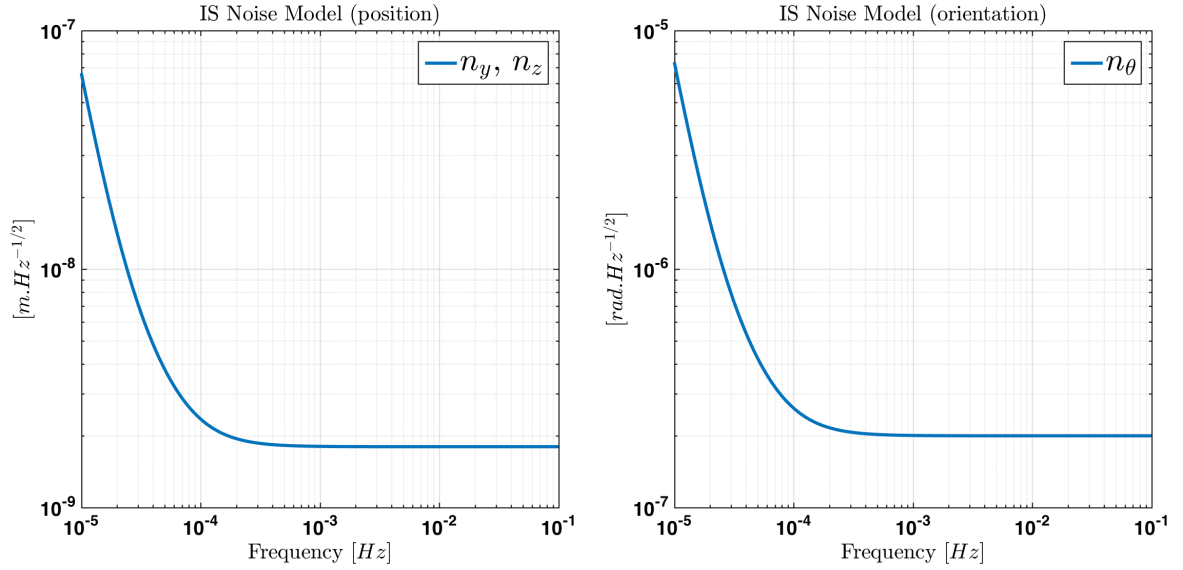


FIGURE 11.3 – Fonction de transfert du modèle de bruit du système de mesure IS. **A gauche :** Niveau de bruit pour la mesure du déplacement des masses d’épreuve suivant les axes  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . **A droite :** Niveau de bruit pour la mesure du déplacement angulaire  $\theta$  des masses d’épreuve (rotation autour de l’axe  $\vec{x}$ ). Modèle issu de la publication [42] qui présente une démonstration expérimentale par l’industriel CGS (Compagnia Generale per lo Spazi) du système capacitif atteignant les exigences en terme de sensibilité.

## Modèle de bruit des micropropulseurs

Le système de micropropulsion utilisé dans *LPF* hérite des propulseurs embarqués par la mission GAIA déployée fin 2013. Dans le contexte de cette mission, le centre de recherche de l’ONERA a mené une campagne de caractérisation des micropropulseurs sur une balance micronewton développée dans un de leurs laboratoires. La description de cette campagne de mesure, du dispositif expérimental et des résultats obtenus a fait l’objet d’une publication [23]. On y trouve notamment le niveau de bruit de propulsion d’un des micropropulseurs étudiés pour un niveau d’actuation de  $500\mu\text{N}$ , l’erreur sur la propulsion effective dépendant du niveau de l’actuation commandée. Le niveau de bruit mesuré est d’environ  $1\mu\text{N Hz}^{-1/2}$  entre  $f = 10\text{mHz}$  et  $f = 1\text{Hz}$ , montrant une tendance en  $1/f^2$  en deçà de cet intervalle. Dans le cas de *LPF*, les actuations seront bien moins intenses, plutôt de l’ordre de la dizaine de  $\mu\text{N}$ . Des mesures similaires ont également été réalisées pour des niveaux d’actuation plus pertinents pour LISA Pathfinder[28]. Pour un niveau d’actuation commandé de  $10\mu\text{N}$ , le niveau de bruit de propulsion est inférieur à  $0,5\mu\text{N Hz}^{-1/2}$  entre  $f = 30\text{mHz}$  et  $f = 1\text{Hz}$ .

La figure 11.4 présente la fonction de transfert utilisée pour reproduire le niveau de bruit des propulseurs. La figure 11.5 expose quant à elle les niveaux de bruit équivalents sur les actuations suivant les axes  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  du satellite.

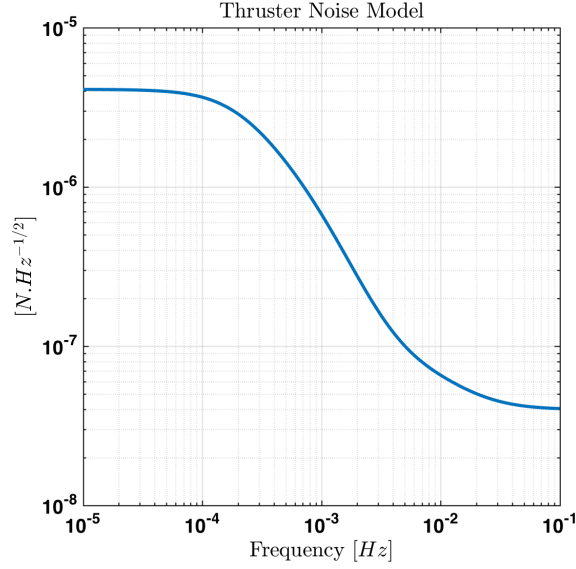


FIGURE 11.4 – Fonction de transfert du modèle de bruit du système d’actuation MPS. Niveau de bruit individuel d’un micropropulseur. Le niveau de bruit équivalent sur chaque axe  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$  et  $\vec{Z}$  est déterminé par projection du niveau de bruit individuel de chacun des douze micropropulseurs. Modélisation adaptée des mesures du bruit de micropropulsion réalisées par l’ONERA sur une balance microneuton [23] [28].

## 11.2 Etude du bruit d’accélération pour une mission présentant les performances attendues pour LISA Pathfinder

Les niveaux de bruit présentés dans les sections précédentes de ce chapitre concernent les performances attendues pour LISA Pathfinder. Il est intéressant d’étudier le bruit d’accélération atteint par une mission *eLISA* possédant de telles performances, sous-entendant un niveau technologique d’ores et déjà bien maîtrisé par la communauté. Au même titre qu’en section 10.3, on réalise à partir de ce nouveau modèle, en particulier de sa version *LPF*, une série de simulations de 41 séquences de  $1.10^5$ s échantillonnées à 10Hz lors desquelles on active successivement les bruits de chacun des modules, pour effectuer finalement une ultime simulation où l’ensemble des bruits de mesure, d’actuation et de perturbation directe est opérationnel. Cette décomposition est présentée en figure 11.6. On note que, dans cette version du modèle, la valeur de la diaphonie d’actuation a été fixée à  $\chi_{\theta \rightarrow x} = 1.10^{-3}$ m et que l’on a réduit d’un facteur 7 le gain de la loi de contrôle de suspension pour la variable dynamique angulaire  $\theta$ . Cette configuration particulière a été considérée afin d’éviter la considérable remontée du bruit d’accélération à haute fréquence, artefact du modèle compte tenu des conclusions de la section 10.4<sup>3</sup>.

Dans la figure 11.6, on remarque qu’entre  $f = 1.10^{-5}$ Hz et  $f = 5.10^{-3}$ Hz le

3. Cette modification sera discutée plus en détail dans le chapitre 12 de la partie suivante.

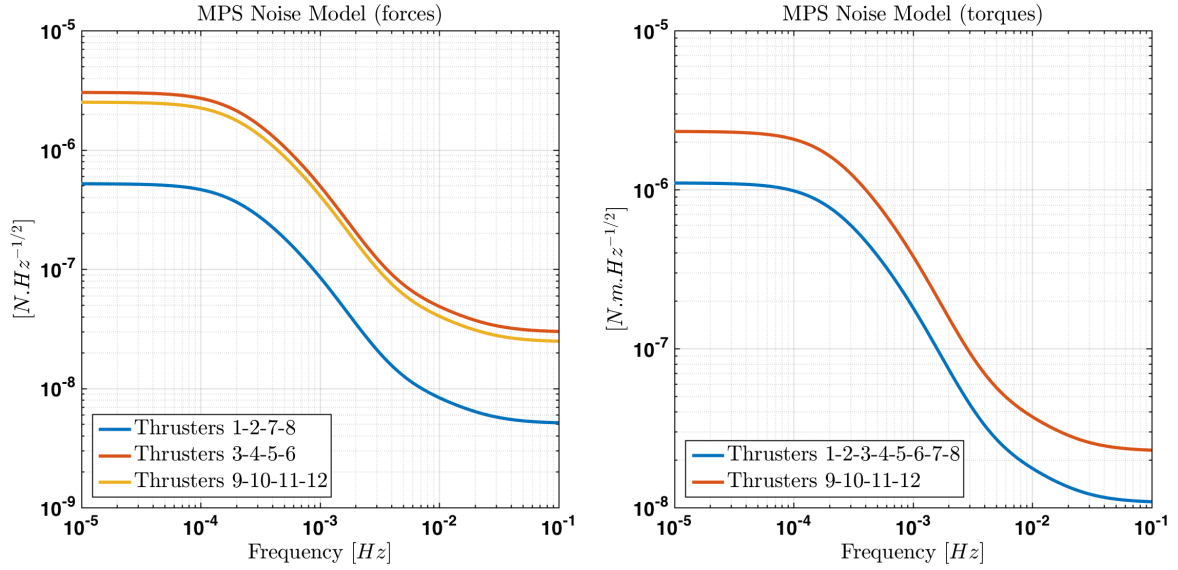


FIGURE 11.5 – **A gauche** : Fonctions de transfert transformant un bruit de propulsion blanc associé à chacun des douze micropropulseurs en un niveau de bruit de force suivant l'axe  $\vec{X}$ . **A droite** : Fonctions de transfert transformant un bruit de propulsion blanc associé à chacun des douze micropropulseurs en un niveau de bruit de couple autour de l'axe  $\vec{X}$ . Ces différentes projections de la fonction des transfert exposée en figure 11.4 considèrent la répartition géométrique des 12 propulseurs de type FEEP du précédent système de micropropulsion envisagée pour LPF.

spectre du bruit d'accélération est complètement dominé par les forces perturbatrices directes. Aussi, on sort des exigences requises pour les fréquences inférieures à  $f = 1\text{mHz}$ . En effet, la démonstration de sensibilité de LISA Pathfinder concerne une bande de fréquence relativement plus restreinte que *eLISA* ( $f = 1 - 30\text{mHz}$ ), dans laquelle, par ailleurs, les exigences sont significativement plus souples, correspondant à un bruit d'accélération inférieure à  $3.10^{-14}\text{m.s}^{-2}\text{Hz}^{-1/2}$  à la fréquence  $f = 1\text{mHz}$  [11]. Cependant, dans la bande  $f = 1 - 10\text{mHz}$ , le bruit d'accélération exposé à la figure 11.6 semble satisfaire les exigences de la mission *eLISA*. Au-dessus, le bruit du système de micropropulsion mène la remontée de l'accélération en se couplant avec les forces de raideur, le mouvement du satellite étant entièrement soumis à la fluctuation de la propulsion à haute fréquence, là où la loi de contrôle *Drag-Free* opère bien plus faiblement (cf. figure 8.15).

Les différences avec les résultats du précédent modèle (cf. figure 10.9) se localisent essentiellement à basse fréquence (si l'on omet l'influence du bruit des senseurs inertiels). Les performances atteintes par la mesure interférométrique se révèlent nettement meilleures que supposées dans le modèle précédent, et le couplage avec les forces de raideur perd nettement de l'influence à basse fréquence. En revanche, la contribution du bruit d'actuation capacitif a été sensiblement sous-estimé et joue ici un rôle plus influent à basse fréquence. On constate surtout de manière générale que les forces directes appliquées sur la masse observent une pente plus importante à basse fréquence laquelle, selon la figure 11.1, semble menée essentiellement par les forces magnétiques parasites, et de manière secondaire, par les champs électrosta-

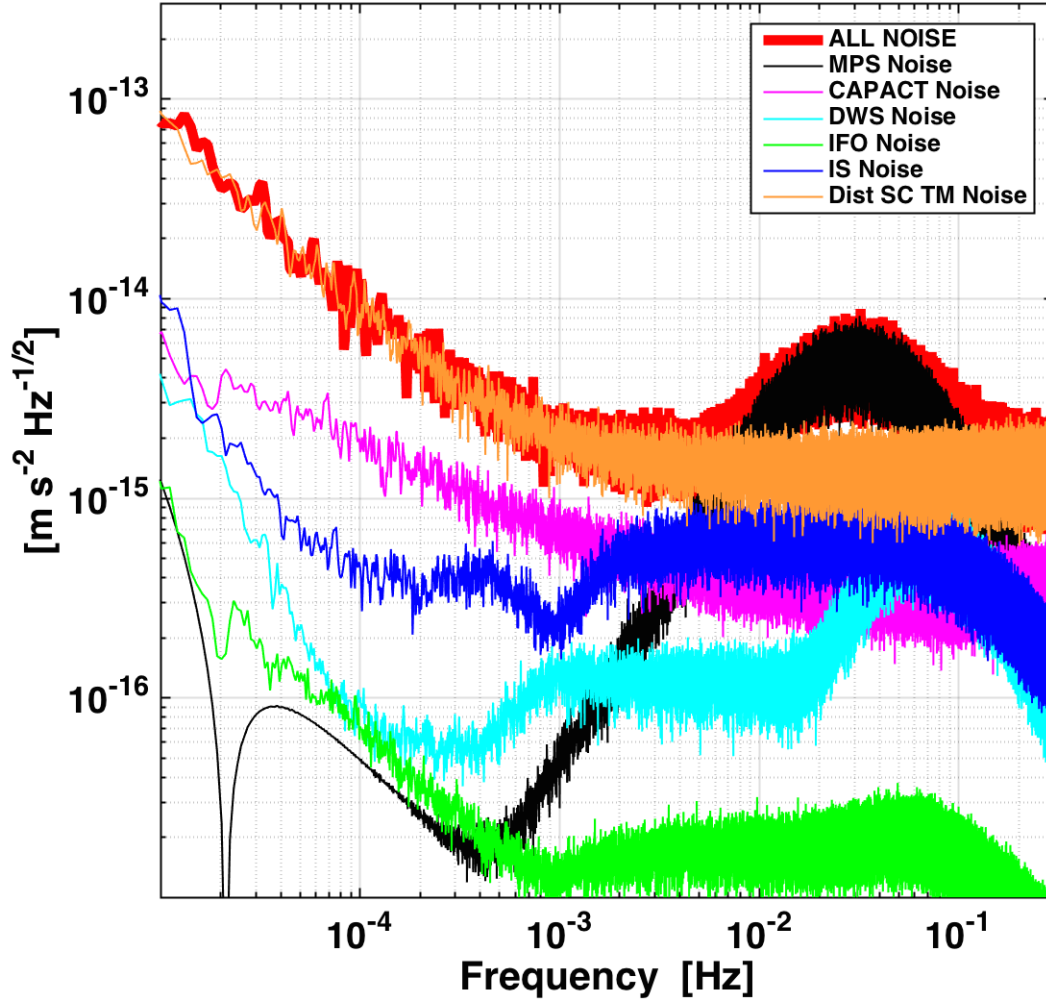


FIGURE 11.6 – Décomposition des contributions de chaque source individuelle de bruit et de perturbation sur le spectre de bruit d'accélération ( $T = 4.10^6$ s, moyenne sur 10 fenêtres temporelles,  $f_s = 10$ Hz, fenêtre de type Blackmann-Harris). Sur cette figure, les modèles de bruit et de perturbations utilisés sont ceux détaillés en section 11.1 et résumés dans la colonne LPF du tableau 11.1. Ils correspondent à une estimation des performances attendues pour la mission LPF. On note que le gain des contrôleurs de suspension pour le degré de liberté  $\theta$  a été réduit d'un facteur 7 et que l'on a imposé la valeur de l'élément de diaphonie  $\chi_{\theta \rightarrow x} = 1.10^{-3}$ m.

tiques parasites se couplant avec la charge non nulle de la masse d'épreuve. Ces deux effets apparaissent donc comme des objets d'amélioration majeure à considérer pour la mission *eLISA*.

## 11.3 Extrapolation du modèle à la mission eLISA

Un sujet essentiel abordé par l'article [15] est de présenter un scénario vraisemblable d'amélioration des performances de la technologie *LTP* afin d'atteindre les exigences particulièrement ambitieuses de la mission *eLISA*. On se décide d'utiliser le scénario présenté dans [15] afin d'estimer le bruit d'accélération obtenu par une telle extrapolation des performances attendues pour *LPF*. Le tableau 11.1 récapitule les hypothèses d'amélioration émises dans [15] concernant cette extrapolation des performances. On note que depuis 2011, année de publication du papier, certains éléments de technologie de *LPF* ont d'ores et déjà démontré des performances accrues. On peut citer par exemple la stabilité de la puissance laser [1] qui semble d'ores et déjà satisfaire dans *LPF* les améliorations préconisées dans [15]<sup>4</sup>.

	Performances attendues par <i>LPF</i> à 0,1 mHz [ fm s <sup>-2</sup> Hz <sup>-1/2</sup> ]	Prévisions pour <i>eLISA</i> à 0,1 mHz [ fm s <sup>-2</sup> Hz <sup>-1/2</sup> ]
Brownien	1, 3 <sup>5</sup>	1, 3 <sup>5</sup>
Magnétique	7, 7	1, 1
Potentiels parasites	2, 2	0, 7
Laser	0, 2 <sup>5</sup>	0, 2 <sup>5</sup>
Thermique	1, 9	0, 7
Champ gravitationnel	1, 8	0, 6
Charge aléatoire	0, 3 <sup>5</sup>	0, 3 <sup>5</sup>
Système capacitif	2.0	0, 7
<b>Total</b>	<b>8.8</b>	<b>2, 3</b>

TABLE 11.1 – Tableau comparant le niveau des forces parasites<sup>6</sup> attendues dans *LPF* et les prévisions pour *eLISA* issues de l'extrapolation des performances de *LPF* discutée dans [15]

On construit alors un nouveau modèle à partir de ces niveaux prévisionnels pour les forces parasites appliquées à la masse d'épreuve. La figure 11.7 présente la décomposition usuelle du bruit d'accélération pour ce dernier modèle. Bien entendu, les modifications visibles par rapport à la figure 11.6 ne concernent que les courbes rouges, oranges et violettes, c'est-à-dire celles incluant l'influence des forces de perturbation directe sur le spectre de bruit d'accélération totale. Seule cette influence a été l'objet d'une modification ici. On constate que le plateau de bruit d'accélération minimal visible sur la figure 11.7, atteignant la valeur de  $\approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2}$  entre 1mHz et 10mHz, s'étend maintenant jusqu'à 0, 1mHz. La largeur de bande de sensibilité maximale est alors plus conforme aux exigences de *eLISA*. La forte réduction des forces parasites d'origine magnétique (un facteur 7 en amplitude), dirigeant

4. L'effet de la pression de radiation sur l'accélération différentielle résiduelle semble inférieur à  $1 \text{ fm Hz}^{-1/2}$  à  $f = 0, 1 \text{ mHz}$  selon les mesures présentées dans [1] et la tendance observée à basse fréquence.

5. On note que pour les valeurs annotées du tableau, les performances attendues de *LPF* semblent d'ores et déjà satisfaire les hypothèses d'amélioration suggérées dans [15]. Lorsque c'est le cas, le niveau de bruit attendu dans *LPF* est également considéré pour la version *eLISA* du modèle.

6. On considère ici les forces s'appliquant sur **une seule masse d'épreuve**.

précédemment la remontée à basse fréquence, explique principalement ces bonnes performances à 0, 1mHz.

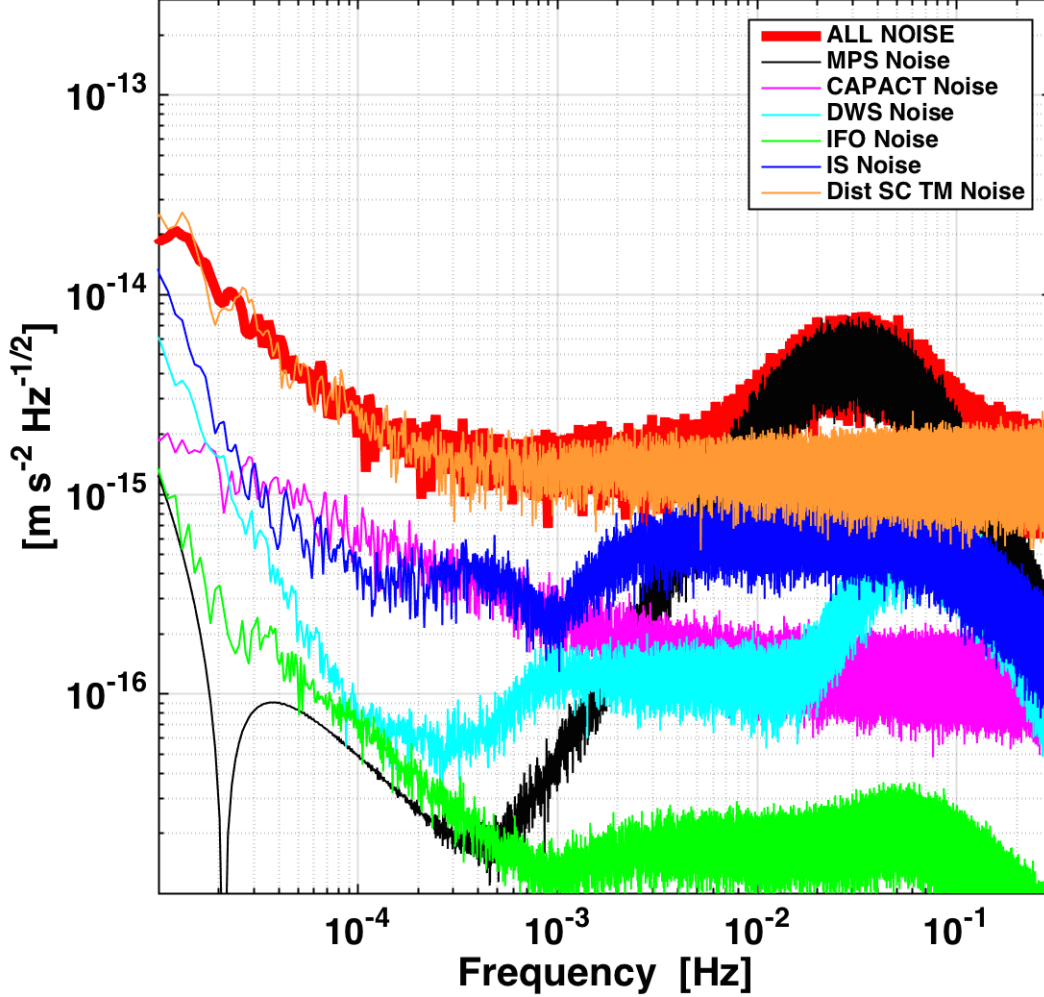


FIGURE 11.7 – Décomposition des contributions de chaque source individuelle de bruit et de perturbation sur le spectre de bruit d'accélération ( $T = 4.10^6$ s, moyenne sur 10 fenêtres temporelles,  $f_s = 10$ Hz, fenêtre de type Blackmann-Harris). Sur cette figure, les niveaux des forces parasites appliquées sur la masse d'épreuve sont issus de l'extrapolation des performances de LPF (cf. tableau 11.1). Ils sont résumés dans la colonne eLISA du tableau 11.1. On note que le gain des contrôleurs de suspension pour le degré de liberté  $\theta$  a été réduit d'un facteur 7 et que l'on a imposé la valeur de l'élément de diaphonie  $\chi_{\theta \rightarrow x} = 1.10^{-3}$ m.



## Quatrième partie

### Discussion et perspectives

Cette partie discussion s'articule autour de trois chapitres. En premier lieu, on expose des conclusions préliminaires aux résultats de simulation, en donnant une première estimation du bruit d'accélération produite par le simulateur, à partir des considérations du chapitre précédent. On essaiera également d'utiliser ce résultat pour discuter de la courbe de sensibilité du détecteur spatial, en prenant néanmoins bon nombre de précautions concernant toute signification quantitative d'un tel résultat préliminaire. Dans un second chapitre, on présentera de multiples propositions d'améliorations du simulateur, comme la construction d'une loi de contrôle plus adaptée à la mission *LISA*, une modélisation physique plus fidèle des différents instruments de mesure et d'actuation impliqués ou encore la possibilité de maintenir des modèles non-linéaires dans la simulation. Enfin, on discutera du lien possible entre le simulateur dynamique développé et les autres projets de simulation réalisés ou envisagés, et en particulier comment celui-ci s'inscrit dans le projet de simulateur "end-to-end" initié par l'équipe de l'AEI (*Albert Einstein Institute, Max Planck Institute for Gravitational Physics*) à Hanovre.

# Chapitre 12

## Première estimation du bruit d'accélération

### 12.1 Configuration optimale

Dans le chapitre précédent, on a discuté des différentes influences sur le bruit d'accélération subi par les masses d'épreuve dans différents domaines de fréquence. On a constaté que son niveau pouvait être exacerbé par certaines imprécisions du modèle, essentiellement à haute fréquence, au travers par exemple de l'utilisation de contrôleurs inadéquats ou des marges trop importantes sur certains paramètres physiques comme la diaphonie d'actuation. On décide ainsi dans ce chapitre de présenter une version idéalisée du bruit d'accélération, tirée d'une configuration du simulateur exemptée de ces défauts. Ces résultats préliminaires illustrent, à titre d'exemple, le pouvoir d'analyse et de prédiction du simulateur pour ce qui concerne les performances atteintes par le détecteur en terme de bruit d'accélération.

La figure 11.7 du chapitre précédent présentait l'étude de décomposition du bruit d'accélération pour le modèle du système le plus abouti de cette étude. Dans cette version, on a réduit le gain de la loi de contrôle de suspension pour la variable dynamique  $\theta$  d'orientation des masses autour de l'axe *Drag-Free X*, degré de liberté responsable de la forte remontée à haute fréquence du bruit d'accélération. On a également utilisé une valeur que l'on pense plus représentative du paramètre de diaphonie d'actuation  $\chi_{\theta \rightarrow x} = 1.10^{-3}\text{m}$ , compromis entre de récentes estimations préliminaires et la spécification de l'industriel, fruit de l'application d'une marge considérable.

La figure 12.1 semble démontrer que les performances en terme de bruit d'accélération différentielle<sup>1</sup> remplissent les exigences de  $3.10\text{fm s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2}$  dans la bande de fréquence  $0,1 - 10\text{mHz}$ . Les facteurs limitant la sensibilité à basse fréquence sont les forces de perturbation directes s'appliquant sur la masse d'épreuve, tandis que

---

1. c'est-à-dire l'accélération relative des deux masses d'épreuve jointes par un des bras de *eLISA*

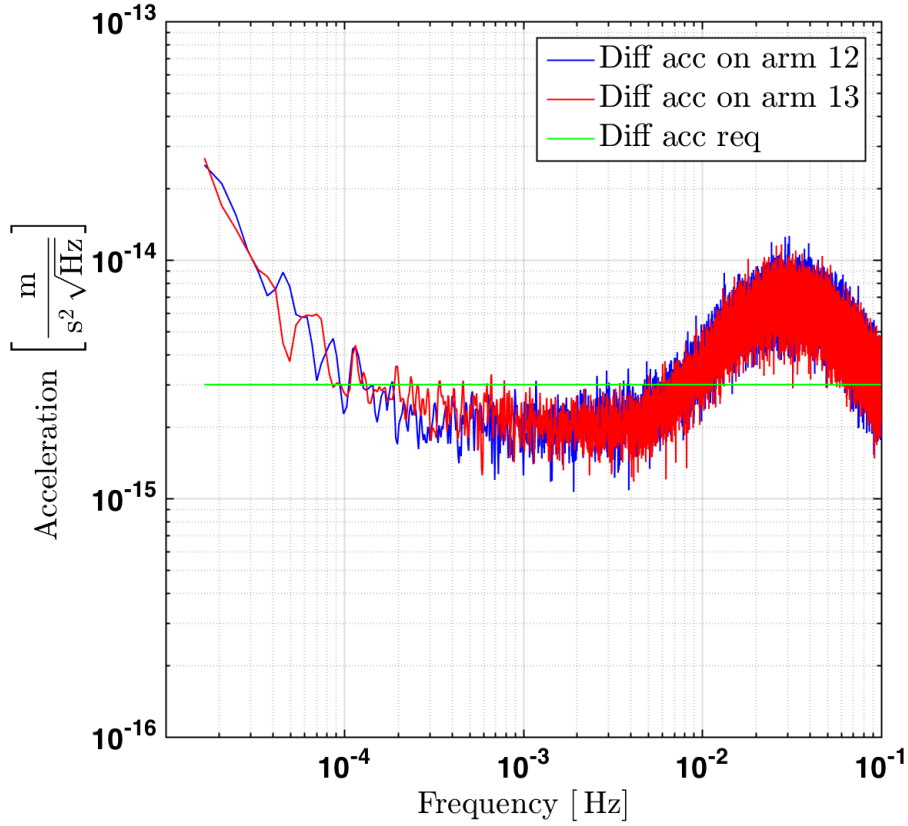


FIGURE 12.1 – Spectres du bruit d’accélération différentielle pour les deux bras de eLISA rejoignant un satellite de la constellation, ici sélectionné comme le satellite numéro 1, et comparaison avec les exigences. Ces dernières sont globalement satisfaites dans la bande 0,1 – 10mHz. En dehors, les forces parasites directes (à basse fréquence) et le bruit de micropropulsion (à haute fréquence) détériore les performances. Ce bruit d’accélération est issu du même modèle que celui étudié à la figure 11.7 du chapitre précédent.

le bruit des micropropulseurs est responsable de la dégradation des performances à haute fréquence, par l’intermédiaire des forces de raideur, de la diaphonie d’actuation et du désalignement entre axe *Drag-Free* et axe sensible.

## 12.2 Bruit d’accélération et variation de chemin optique

On se propose alors de convertir ce résultat préliminaire de bruit d’accélération en terme de bruit de déplacement. On rappelle que le bruit d’accélération subi par les masses d’épreuve dégradera les qualités de particules inertielles de référence que ces masses sont censées posséder. Le chemin optique emprunté par le laser reçu par un des satellites impliqués, se voit fluctuer en concert avec le mouvement relatif des

deux satellites, introduisant alors un bruit de phase supplémentaire à la mesure. Les masses de référence, en les supposant parfaitement inertielles, sont présentes pour obtenir l'information de cette agitation excessive des satellites et d'en retrancher alors sa contribution sur la fluctuation de chemin optique. Dans le cas inévitable où ces masses ne constitueraient pas de parfaites références inertielles, ce qui revient à dire que les masses d'épreuve se voient soumises à une accélération parasite, en particulier suivant l'axe sensible du bras considéré, un bruit de déplacement résiduel est alors introduit, se manifestant comme une nouvelle source de bruit de phase.

Dans cette section, on rendra compte de l'effet du bruit d'accélération résiduel sur la mesure par le bruit de déplacement équivalent  $\tilde{x}_{acc}$ , directement lié à la variation de chemin optique. On pratique la conversion par double intégration temporelle du bruit d'accélération estimé. On s'attachera en particulier à la densité spectrale en amplitude du bruit de déplacement, en adoptant la même convention de construction de spectre que jusqu'à présent <sup>2</sup>.

$$\tilde{x}_{acc} = DSP \left( \iint \vec{a}_{noise} \cdot \vec{S}(t) dt \right) \quad (12.1)$$

A ce jour, on utilise généralement un bruit d'accélération blanc d'amplitude  $3.10^{-15} \text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2}$  pour construire les courbes de sensibilité de *LISA* [41]. On alors le bruit de déplacement équivalent suivant :

$$\tilde{x}_{acc}^{req} = \frac{3.10^{-15} \text{m s}^{-2} \text{Hz}^{-1/2}}{(2\pi f)^2} \quad (12.2)$$

La variation de chemin optique équivalente est déterminée à partir du bruit d'accélération différentielle présenté dans la figure 12.1 de la section précédente. Elle est issue d'une simulation d'une durée de  $1.10^6 \text{s}$  échantillonnée à 10Hz. Pour obtenir l'accélération différentielle sur chaque bras, on multiplie par un facteur  $\sqrt{2}$  le bruit d'accélération obtenu pour une des masses d'épreuve <sup>3</sup> mises en jeu dans le lien laser <sup>4</sup>. On présente dans la figure 12.2 une première estimation de la courbe de sensibilité du détecteur en s'appuyant sur l'article [41] pour l'estimation du bruit de déplacement interférométrique. Cet article et le site web <sup>5</sup> qui lui est associé proposent au lecteur d'effectuer son propre design du détecteur en choisissant un certain nombre d'options (comme la longueur de bras de l'interféromètre, la puissance du laser, le

---

2. spectre moyenné sur 10 fenêtres de temps, application d'une fenêtre d'apodisation de type Blackman-Harris

3. On pratique la somme quadratique des spectres, car les accélérations subies par les masses d'épreuve aux extrémités d'un lien laser sont incohérentes. On pourrait réaliser une simulation pour chacune des masses et simplement combiner les séries temporelles, mais l'analyse a posteriori dont elles font l'objet ici demande encore trop de ressources de calcul pour cela.

4. A nouveau, on exprimera quelques objections au sujet d'une telle combinaison des accélérations des masses d'épreuve. En opérant de cette manière à partir des accélérations physiques réelles, on construit plus, en réalité, une limite inférieure du bruit d'accélération qu'une estimation réaliste qui prendrait en compte le traitement *TDI*.

5. <http://spacegravity.org/designer>

diamètre des télescopes, le nombre de quadrants des photodétecteurs...) et d'en déduire la sensibilité obtenue. Il intègre également une version du bruit d'accélération qui n'est autre que celui de l'équation 12.2, constituant davantage une spécification qu'une tentative d'estimation. On opte ici pour la configuration dite "*eLISA 2013*" de l'article. Afin de déterminer l'amplitude de l'onde gravitationnelle équivalente à l'observation de ces bruits instrumentaux, on utilise une approximation analytique de la fonction de réponse du détecteur établie dans [24], document de référence pour le "Yellow Book" [31] en ce qui concerne la courbe de sensibilité du détecteur.

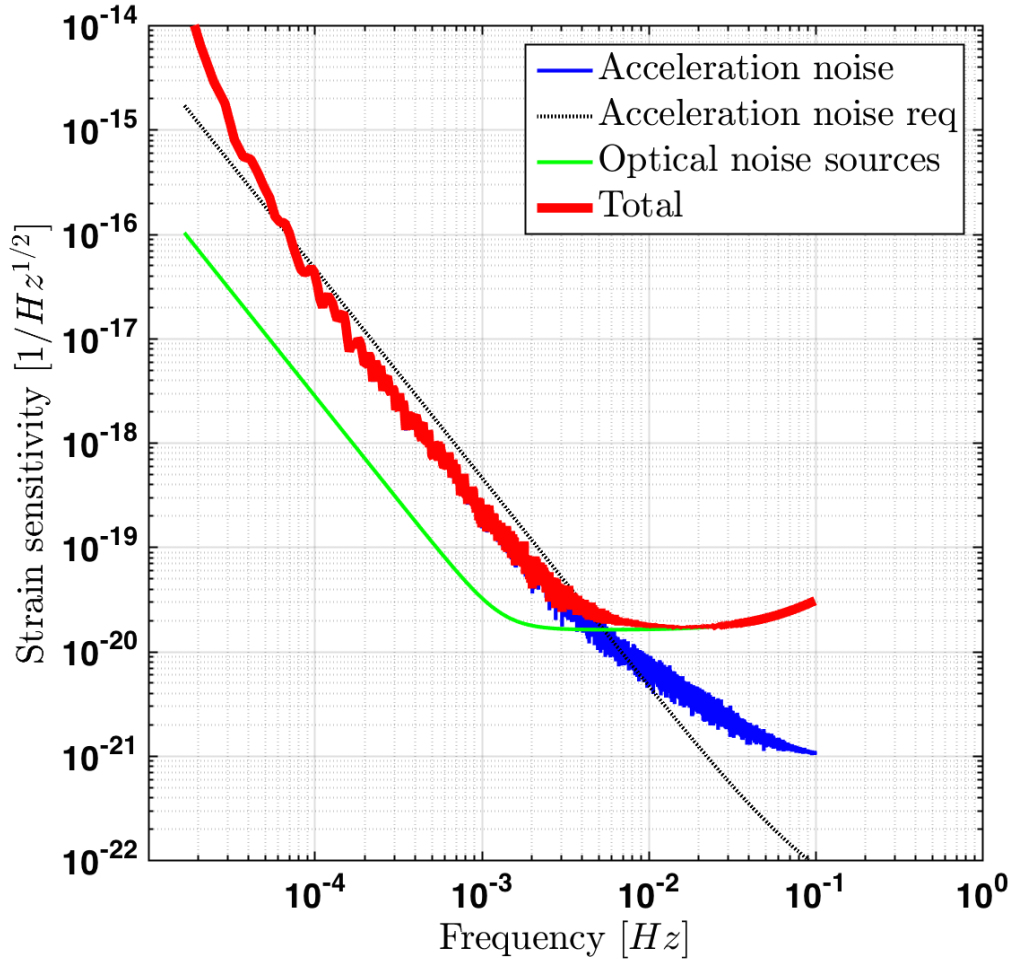


FIGURE 12.2 – Estimation de la sensibilité du détecteur spatial, selon les hypothèses de [41] concernant les bruits d'origine optique et selon l'approximation de [24] concernant la fonction de réponse du détecteur. Le tracé vert est issu de [41] et illustre la déformation équivalente des bruits d'origine optique pour la configuration dite "*eLISA 2013*", c'est-à-dire celle présentée dans le cadre du programme "*Cosmic Vision*" de l'agence spatiale européenne<sup>6</sup>. Le tracé rouge correspond au bruit d'accélération estimé par le simulateur et converti en déformation équivalente observée par l'interféromètre spatial. Le tracé pointillé noir concerne quant à lui les exigences en terme de bruit d'accélération.

6. choix du thème scientifique de la mission large *L3* en novembre 2013

Sur la figure 12.2, sont représentées les amplitudes de déformation équivalentes à l'observation du bruit d'accélération seul, du bruit d'origine interférométrique, de l'association de ces deux sources de bruit, et enfin, d'un niveau de bruit d'accélération correspondant seulement aux exigences ( $3.10^{-15} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2}$ ) à titre de comparaison. Comme déjà observé dans le domaine des accélérations, on constate que la sensibilité déduite des résultats du simulateur surpasse les exigences dans le domaine de fréquence  $0,1 - 10 \text{ mHz}$ , en deçà duquel le spectre du simulateur admet une pente sensiblement plus forte. La remontée à haute fréquence influencée par le bruit du système de micropropulsion semble quant à elle secondaire sur la figure, puisque les sources de bruit optiques deviennent d'influence prépondérante à partir de  $4 \text{ mHz}$ .

On est cependant obligé de se munir de quelques précautions à ce stade de la discussion. Tout d'abord, le bruit d'accélération dégagé dans les chapitres précédents est une quantité physique connue du simulateur, mais non observée directement par le détecteur. En réalité, ce bruit sera introduit dans le traitement a posteriori, lors de la recombinaison des signaux des interféromètres locaux (position des masses d'épreuve) et des interféromètres scientifiques (inter-satellite). Dans une configuration de *eLISA* pour laquelle les télescopes seraient fixes, les imperfections de pointage inévitables, initiées par la respiration orbitale de la constellation, entraînent un désaccord entre l'axe de mesure interférométrique du déplacement des masses d'épreuve, dit axe *Drag-Free*, et l'axe sensible, axe optique du lien laser joignant les deux satellites. Il s'en suit d'éventuelles difficultés géométriques rencontrées dans la combinaison des différents signaux interférométriques. De plus, parce que le bruit de phase se propage d'un satellite à l'autre à une vitesse finie, la recombinaison de ces signaux implique la considération d'opérateurs de retard, dépendant de la distance inter-satellite dont la connaissance sera imprécise. En outre, ces deux considérations rendent les résultats de la figure 12.2 quelque peu idéalisés. On présente tout de même cette figure à titre d'exemple, en particulier pour illustrer le type de résultats accessibles par ce travail de simulation.

# Chapitre 13

## Proposition d'améliorations du simulateur

Le simulateur dynamique développé et présenté dans ce document constitue une étape importante de l'entreprise de simulation de la mission *LISA*. A ce stade, il semble d'ores et déjà constituer un intéressant outil de compréhension du détecteur de par l'étude de la propagation des différents bruits et imperfections modélisés des sous-modules sur les performances finales de mesure. D'ailleurs, les objectifs d'un tel simulateur peuvent être envisagés sous différents angles. On peut par exemple vouloir seulement en obtenir une prévision de la sensibilité du détecteur en terme de bruit d'accélération, point de vue que l'on a adopté pour le moment. Mais on peut également choisir d'intégrer ce travail dans une simulation de plus grande envergure, en construisant un simulateur reproduisant au mieux les conditions réelles de mission. Dans ce cas, le simulateur est destiné à la production de données simulées qui seront utilisées pour la préparation de l'analyse des données de la mission. Afin de concrétiser ces ambitions, le simulateur devra être augmenté de plusieurs améliorations, dont certaines ont déjà été évoquées. Le présent chapitre se dédie à proposer quelques-unes des améliorations possibles.

### 13.1 Optimisation des contrôleurs

Dans la section 10.4, on a vu l'influence considérable des performances de contrôle sur le niveau de bruit d'accélération, essentiellement à haute fréquence. Dans ce simulateur, on a décidé d'utiliser directement les contrôleurs de *LPF*, permettant une stabilisation du système et la fermeture de la boucle de contrôle. Cette fermeture a été le point de départ de l'ensemble de l'analyse qui a d'ailleurs permis de mettre en évidence l'importance de l'optimisation de la loi de contrôle. C'est à ce titre que l'on a considéré important de fermer rapidement la boucle, quitte à s'attendre à observer des performances de contrôle en-deçà des exigences initiales. Une fois cette boucle fermée, la compréhension du système, la comparaison des performances aux



exigences, l'étude des fonctions de sensibilité et sans oublier l'utilité pédagogique d'une telle ébauche font de l'optimisation de la loi de contrôle un objectif davantage à portée de main.

En ce qui concerne la construction et l'optimisation d'une loi de contrôle, il existe un nombre considérable de techniques et une vaste littérature spécialisée. Dans le domaine du spatial, les contraintes de performances et de robustesse sont en général très fortes, ce qui rend la tâche particulièrement exigeante. On rappelle que la robustesse d'une loi de contrôle correspond à sa qualité d'insensibilité aux imprécisions de modélisation. Plus un contrôleur sera robuste, et moins ses performances seront influencées par des écarts entre le modèle et le système réel à contrôler. Cette robustesse peut être estimée quantitativement au travers de la fonction de transfert de sensibilité  $S$  mentionnée en section 10.4.1. De manière générale, les fonctions  $S$  et  $T$  sont utilisées dans ce que l'on appelle les techniques de design de loi de contrôle dans le domaine de fréquence. Elles permettent d'optimiser les influences des diverses perturbations (bruits de mesure, forces et couples directs, imperfections du modèle...) sur les performances de contrôle.

Cependant, ces optimisations peuvent parfois être incompatibles. La manipulation des fonctions de sensibilité  $S$  et  $T$  est soumise à une limitation fondamentale, clairement mise en évidence par la relation dans l'équation 13.1.

$$S + T = \frac{1}{1 + GK} + \frac{GK}{1 + GK} = 1 \quad (13.1)$$

Il existe une méthode communément utilisée dans le domaine du spatial appelé *H-infinity optimisation* [13]. Cette technique fait appel à une matrice  $H$  contenant 4 fonctions de transfert, surnommées "le gang des 4". Ces fonctions sont les suivantes :

$$S = \frac{1}{1 + GK} \quad T = \frac{GK}{1 + GK} \quad (13.2)$$

$$GS = \frac{G}{1 + GK} \quad KS = \frac{K}{1 + GK} \quad (13.3)$$

L'apparition de ces fonctions a été observée dans les équations 10.13 et 10.13. Elles sont appelées respectivement fonction de sensibilité  $S$ , fonction complémentaire de sensibilité  $T$ , fonction de sensibilité de charge (aux perturbations)  $GS$  et fonction de sensibilité au bruit  $KS$ . A partir de ces fonctions, on écrit la matrice  $H$  comme :

$$H = \begin{pmatrix} S & GS \\ KS & T \end{pmatrix} \quad (13.4)$$

Le but de la méthode  $H_\infty$  est alors de minimiser la norme infinie  $\|H\|_\infty$  de cette matrice  $H$ . On peut montrer [13] que la norme infinie de cette matrice s'écrit :

$$\|H\|_{\infty} = \sup_{\omega} \left( \frac{\sqrt{(1 + |G(i\omega)|^2) (1 + |K(i\omega)|^2)}}{|1 + G(i\omega)K(i\omega)|} \right) \quad (13.5)$$

On pose ici  $s = i\omega$  car seul est considéré le comportement en régime permanent dans le cadre du design dans le domaine fréquentiel. Pour un système stable, tous les effets transitoires disparaissent au bout d'un certain temps, et on ne considère plus que la partie imaginaire de la variable de Laplace  $s$  correspondante aux phénomènes périodiques.

Le problème du design des contrôleurs revient alors à trouver la loi de contrôle  $K$  permettant de minimiser la norme  $\|H\|_{\infty}$ . Cette minimisation assure que les gains des fonctions de transfert  $GS$  et  $KS$  sont faibles, mais attribue également des seuils maximaux aux fonctions de sensibilité  $S$  et  $T$  qui sont également contenues dans la matrice  $H$ . Il existe des algorithmes pour déterminer une loi de contrôle  $K$  qui maintient la norme  $\|H\|_{\infty}$  en dessous d'un certain seuil fixé par les exigences spécifiques au problème. Une telle loi de contrôle peut par exemple être obtenue en résolvant des équations appelées *Equations algébriques de Riccati*. On n'entrera pas plus dans les détails ici. On note tout de même que cette méthode est accessible via la fonction `hinfsyn` de la boîte à outil *Robust control toolbox* du logiciel Matlab.

Matlab fournit aussi par l'intermédiaire de la boîte à outil *Robust control toolbox* un outil graphique commode de design de loi de contrôle appelé *Control System Designer Tool*. En particulier, on peut y spécifier les différentes exigences de performances au travers de contraintes sur les fonctions de sensibilité de l'équation 13.3. Cet instrument ne s'applique qu'au cas des modèles SISO, de l'anglais *Single Input Single Output*. Cependant, on a vu en section 8.5.3 comment se retrouver avec un ensemble de modèles SISO à partir du modèle *MIMO* considéré dans le simulateur. A ce jour, on envisage de réaliser l'optimisation de la loi de contrôle du simulateur à l'aide de la méthode présentée dans cette section brièvement et en particulier de l'outil *Control System Designer Tool* évoqué ici.

## 13.2 Modélisation fidèle des instruments de mesure et d'actuation

A ce stade, la modélisation des systèmes de mesure et d'actuation se résume à des matrices de diaphonie, révélant les imperfections géométriques, éventuellement des temps de réponse, par l'introduction de délais ou de pôles, et des modèles de bruit linéaires et stationnaires. Une fois le premier système en boucle fermée réalisé et analysé, l'étape suivante consiste à se concentrer sur une modélisation plus sophistiquée des différents modules, que l'on souhaite plus proche de la caractérisation expérimentale que des spécifications. L'idée est de se rapprocher ou éventuellement de suggérer la participation des différents spécialistes du domaine au sein de la

communauté. En effet, un des objectifs de ce simulateur est de constituer une modélisation la plus fidèle possible de l'instrument qui serait intégrée à un logiciel de simulation "end-to-end" dédié à la production de données simulées.

Les imperfections géométriques du système d'actuation, c'est-à-dire la fuite de forces (torques) commandées sur (autour d') un axe vers un second, constitue potentiellement comme on l'a vu une source de bruit d'accélération importante du détecteur. Ainsi, une modélisation plus réaliste du système d'actuation capacitive apparaît une priorité à ce niveau. Comme mentionné en section 10.4.2, l'étude d'une modélisation plus fidèle est à l'oeuvre au laboratoire AstroParticule et Cosmologie (*APC*), spécifiquement dédiée à l'estimation de cette matrice de diaphonie. Cette étude a d'ores et déjà montré par exemple que la matrice de diaphonie n'est certainement pas une quantité physique statique, et dépend par définition de l'orientation et la position des masses d'épreuve, introduisant par conséquent des non-linéarités dans le système.

Les systèmes de mesure ont également été largement simplifiés, en particulier le système interférométrique. Les équations de mesure considérées dans la représentation d'état manipulent directement les variables dynamiques, éventuellement recomposées pour rendre compte des imperfections géométriques et augmentées d'un bruit de mesure. Une considération plus intime de la physique qui décomposerait par exemple la mesure interférométrique et solliciterait la définition des chemins optiques et de la mesure de phase pourrait être envisagée. Cela permettrait également l'introduction d'un modèle de phasemètre avec un bruit associé. De même, il serait important d'établir une distinction claire entre système Differential Wavefront Sensing (*DWS*) de mesure interférométrique de l'orientation des masses d'épreuve et les mesures de déplacement en translation, et à cet effet, de tenir compte de la présence des photodétecteurs à quadrants. De manière générale, dans l'idéal, les modules de mesure du simulateur ne devraient impliquer directement que les quantités physiques observables par les instruments de mesure. Cependant, à nouveau, une telle entreprise suscitera nécessairement un accroissement de la complexité du système, de par les non-linéarités probables à considérer, tout en y perdant en flexibilité.

On voit alors surgir un obstacle à la linéarisation du problème. Une modélisation plus fidèle de l'instrument nécessitera certainement une plus grande complexité du modèle en boucle fermée, essentiellement du fait des propriétés non linéaires et stationnaires que l'on devra considérer. De plus cette complexité accrue se répercutera inévitablement sur le temps de calcul, diminuant d'autant la souplesse d'utilisation de l'outil de simulation. Les études de configuration, les analyses de contribution des imperfections et globalement l'aspect compréhension du système seront certainement rendus plus difficiles à mettre en oeuvre. D'où la nécessité de bien distinguer deux objectifs potentiellement incompatibles du simulateur, à savoir l'intégration dans un simulateur "end-to-end" plus exhaustif et complexe et une simulation simplifiée mais flexible et rapide, adaptée aux tests de multiples configurations de l'instrument.

### 13.3 Construction d'un modèle non-linéaire

Le modèle dynamique considéré dans le simulateur a été linéarisé en section 7.3, en s'aidant notamment du fait qu'en présence de la boucle de contrôle, les coordonnées dynamiques restent en permanence au voisinage de leur valeur de consigne, nulle dans ce cas, aux erreurs de contrôle près présentées dans la section 10.1.2. On a également été amené à considérer constants certains termes instationnaires de la représentation d'état, en fait ceux se couplant avec les variables dynamiques, et qui correspondent à des forces et couples d'inertie. Bien que ces termes d'inertie, du second ordre, paraissent d'influence très faible en comparaison des bruits et des forces de perturbation directes appliquées aux masses d'épreuve, il semble intéressant d'étudier l'impact de cette linéarisation sur les résultats finaux en terme de bruit d'accélération, voire sur les performances de la loi de contrôle.

Le modèle dynamique tel qu'il a été implémenté permet un basculement aisé entre modèle linéaire et non-linéaire. La fonction MATLAB `EOM.m` associée à ce modèle prend en argument le vecteur d'état  $\vec{X}$  donnant l'ensemble des variables dynamiques du modèle et l'attitude de consigne du satellite, élément responsable de la non-stationnarité du modèle. Prendre en compte un modèle linéaire et stationnaire ou non-linéaire revient alors à faire évoluer ou non le vecteur d'état et l'attitude de consigne en argument. Pour utiliser un modèle linéaire et stationnaire, on n'utilise qu'un modèle unique pour l'ensemble de la simulation donc les matrices d'état sont construites à partir du vecteur d'état et de l'attitude de consigne à l'instant initial (le vecteur d'état initial étant nul par défaut). A l'inverse, considérer un modèle non-linéaire consiste à faire évoluer les matrices d'état du modèle conjointement au vecteur d'état et à l'attitude de consigne.

L'introduction d'un modèle non-linéaire dans le système n'est pas anodine. Elle a pour effet de compliquer considérablement l'assemblage des différents sous-modules, la résolution des équations différentielles et d'interdire également le principe de superposition, invoqué notamment dans l'assemblage des sous-modules mais aussi dans l'étude de la décomposition du bruit d'accélération. On propose cependant ici une première stratégie simple qui permettrait d'introduire la non-linéarité de la dynamique. On pourrait a priori assembler tous les sous-modules linéaires du système et résoudre simultanément mais séparément les parties linéaires et non-linéaires. Le modèle dynamique  $G$  non-linéaire serait pris en charge par un solveur non-linéaire, nécessairement à pas constant, qui se nourrirait à chaque instant des forces commandées par le modèle de contrôle, quant à lui linéaire, augmenté des modèles de mesure et d'actuation. De toute évidence, le temps de calcul se verrait nettement allongé par cette stratégie mais on pourrait alors vérifier définitivement la validité de la procédure de linéarisation de la dynamique.

Dans le cadre d'une modélisation plus fidèle des systèmes de mesure et d'actuation, on pourra aussi être amené à introduire de nouvelles non-linéarités et instationnarités dans le système, comme évoqué dans la section précédente. Cette situation nous conduira probablement à repenser plus en profondeur les procédures d'assemblage et de résolution du système différentiel décrites jusqu'à présent.

## 13.4 Influence de l'attitude du satellite

Durant la construction de ce simulateur, on a pris conscience du caractère primordial de la stratégie de pointage sur les performances en terme de bruit d'accélération. Dans une configuration de la mission de *LISA* où les télescopes maintiennent un écart angulaire relatif fixe de  $60^\circ$ , la respiration de la formation triangulaire, tenant son origine des trajectoires orbitales sélectionnées, et l'agitation angulaire du satellite entraînent une discordance entre l'axe *Drag-Free*, axe de plus grande sensibilité du détecteur, et l'axe dit sensible suivant lequel les performances sont exigées. Grâce à la stratégie de décomposition des influences mise en place en section 10.3, on est capable d'observer l'effet de cette mauvaise correspondance en comparant la décomposition pour une projection du bruit d'accélération sur l'axe sensible et une autre sur l'axe *Drag-Free*.

Dans la figure 13.1, on présente la décomposition en l'absence de diaphonie, d'effets de raideur et en considérant une projection du bruit d'accélération sur l'axe *Drag-Free*. Cette figure est à comparer à la figure 10.14 qui correspond à la même configuration à l'exception de l'axe de projection du bruit d'accélération qui est pour cette dernière l'axe sensible. On constate alors une nette diminution de la contribution de l'ensemble des bruits, à commencer par le bruit des micropropulseurs d'influence jusque là dominante. Cela s'explique par le fait que toute actuation directe du système capacitif sur les masses d'épreuve suivant l'axe *Drag-Free* est interdite par la stratégie de contrôle. Dans le cas où cet axe ne coïncide pas avec l'axe sensible, une partie des actuations directes sur les masses d'épreuve se projettent suivant l'axe d'observation.

Mais ce n'est pas la seule incidence de cette discordance. Comme exposé dans le dernier paragraphe de la section 12.2, le bruit d'accélération présenté jusqu'à présent correspond à une quantité physique "réelle" non directement observée par le détecteur. Pour mettre en évidence l'influence de la qualité du pointage sur le bruit d'accélération, il est nécessaire de considérer non pas une quantité physique inconnue du détecteur mais sa propagation sur l'observable finale au travers des senseurs et du traitement a posteriori, type *TDI*, qui recombine les différents signaux impliqués tout en tenant compte des délais temporels à considérer. A ce jour, il n'a pas encore été décidé d'inclure ces aspects-là dans le simulateur, car on se situe à cheval entre deux niveaux de simulation différents : l'un plutôt local, concentré sur la simulation de la dynamique de chaque satellite considéré indépendamment et localement, et un autre plus global, de type *LISACode*, concerné par les aspects de synchronisation et de recombinaison des différents signaux de mesure en provenance des trois satellites.

Comme plusieurs fois évoqué, une configuration de l'instrument qui considère des télescopes rigides amplifie considérablement le désalignement des axes de mesure de déplacement des interféromètres locaux (TM-S/C) et scientifique (S/C-S/C), puisque l'on se trouve incapable d'adapter la direction des axes *Drag-Free* à l'évolution des axes sensibles qu'entraîne la respiration de la constellation. Bien entendu, ce phénomène perd de l'importance lorsque les télescopes sont orientables et peuvent s'adapter à cette évolution. A ce titre, il serait important d'inclure ce degré de li-

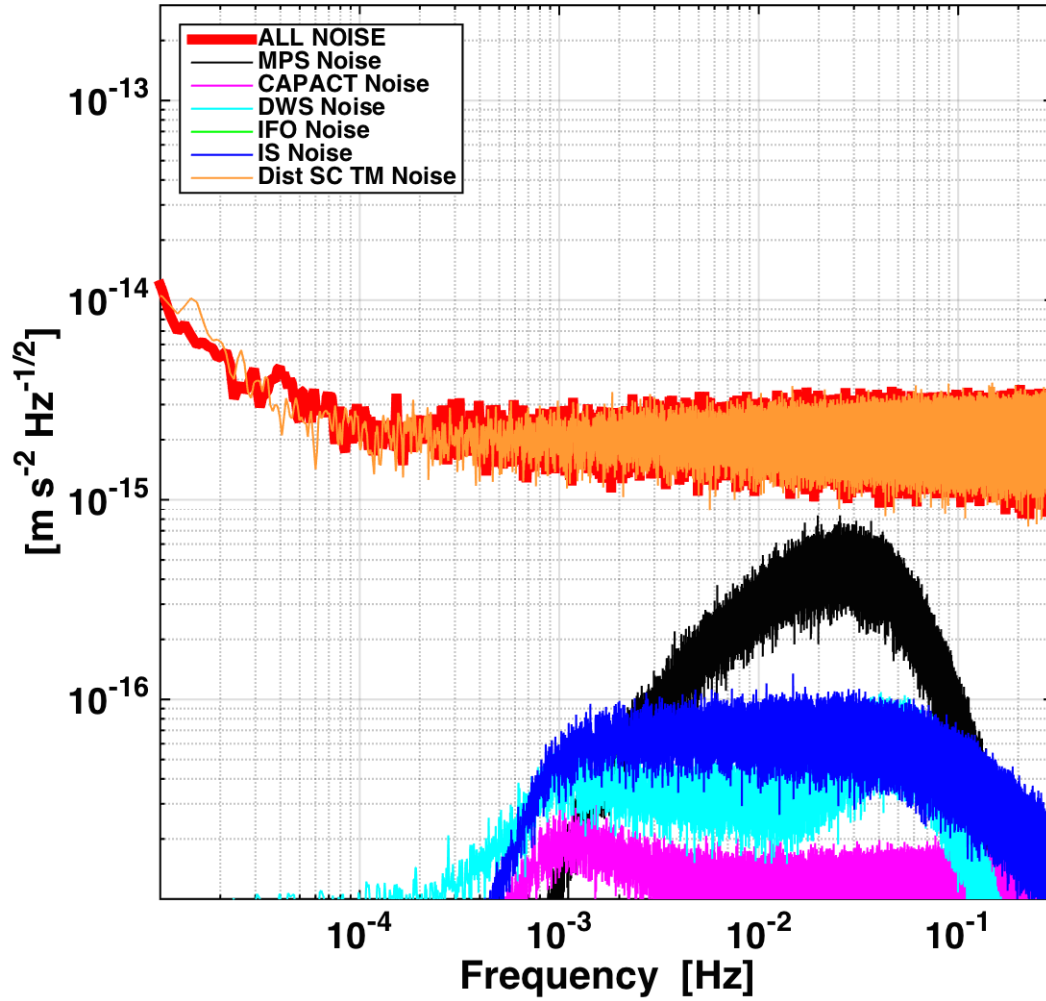


FIGURE 13.1 – Décomposition des contributions de chaque source individuelle de bruit et de perturbation sur le spectre de bruit d'accélération ( $T = 4.10^6$ s, moyenne sur 10 fenêtres temporelles,  $f_s = 10$ Hz, fenêtre de type Blackmann-Harris). Sur cette figure, on désactive à la fois les forces de raideur et les diaphonies d'actuation du système capacitif. On projette également l'accélération de la masse d'épreuve, non plus suivant l'axe sensible, mais suivant l'axe Drag-Free. Cette figure doit être comparée aux figures 10.9 et 10.14.

berté dynamique au simulateur, éventuellement en tant qu'option, permettant ainsi l'étude et la comparaison de ces deux configurations possibles.

## 13.5 Etude de configurations de l'instrument

Le simulateur donne l'opportunité d'étudier diverses configurations du détecteur. A ce jour, aucun design définitif de l'instrument n'a été établi. La récente validation du thème scientifique par l'European Space Agency (*ESA*) pour la mission *L3*, motive la collaboration à définir, d'ici la fin de la décennie, un design définitif et une sensibilité attendue pour l'instrument. L'outil de simulation développé pourrait participer à cet effort, en permettant l'analyse des performances du détecteur en terme de bruit d'accélération pour plusieurs configurations. A titre d'exemple, comme cela a déjà été discuté, les avantages et inconvénients de la mobilité des télescopes pourraient être pesés par l'intermédiaire de ce simulateur. Des modifications plus radicales pourraient être étudiées, comme par exemple une constellation comportant une seule masse d'épreuve par satellite. Cette dernière serait alors en *Drag-Free* suivant tous ses degrés de liberté linéaires, mais serait, en revanche, sollicitée sur deux bras interférométriques du détecteur, cette propriété générant probablement quelques complications. Une autre possibilité serait, à l'inverse, d'augmenter le nombre de masses d'épreuve par satellite, par exemple deux masses par banc optique, afin de réaliser des mesures du bruit d'accélération en vol, à la manière de *LISA Pathfinder*. On peut imaginer ainsi de nombreux concepts, qui demanderaient vraisemblablement une modification du modèle dynamique du simulateur et éventuellement de la stratégie de contrôle déployée. La flexibilité du modèle linéaire en boucle fermée pourrait s'accommoder sans trop de peine de tels changements.

L'expérience *LISA Pathfinder* sera l'occasion d'étudier la technologie *LTP* en environnement spatial. Durant les opérations, de nombreuses investigations sont prévues pour caractériser l'instrumentation embarquée, et de nombreuses propriétés modélisées dans ce simulateur seront évaluées en vol par *LISA Pathfinder*. On peut citer les forces de raideur typiques couplant la dynamique du satellite et de la masse d'épreuve ou les paramètres de diaphonie<sup>1</sup>. Cependant, la transposition des résultats de *LISA Pathfinder* vers *eLISA* ne saurait être complètement directe, car leur instrumentation embarquée sera nécessairement différente. On peut alors imaginer reproduire, durant la mission *eLISA*, certaines des investigations réalisées pour *LISA Pathfinder*. Le simulateur développé pourrait être utilisé pour tester ces procédures d'investigation, au même titre que le simulateur *LPF* de la boîte à outil *LTPDA* qui a constitué, à cet effet, un dispositif majeur.

---

1. On note que dans le simulateur, la modélisation de ces propriétés physiques nécessite plusieurs hypothèses simplificatrices, comme la stationnarité des forces de raideur et de la diaphonie.

# Chapitre 14

## Le simulateur dans la collaboration eLISA

Ce travail de simulation s'inscrit également dans l'élaboration d'un simulateur de plus grande envergure de la mission *eLISA*. Un projet de construction d'un simulateur "*end-to-end*" dont l'ambition est de tenter de reproduire l'ensemble de la chaîne de détection, de l'onde gravitationnelle détectée jusqu'à l'analyse de données, en passant par la modélisation la plus fidèle possible du fonctionnement des différents modules impliqués, de leurs interactions, de leurs imperfections et la composition adéquate de tous les signaux de mesure. Ce simulateur a ainsi pour objectif de constituer un outil de préparation à l'analyse de données par la production de flux de données comparables à ceux de la mission réelle. Les outils d'analyse de données seront alors testés sur ces données artificielles avant que ces dernières soient remplacées par de réelles observations.

Un nouveau groupe de travail s'est assemblé dans la collaboration *eLISA* autour de ce projet de simulation. Une architecture préliminaire a été dessinée par l'équipe de l'AEI à Hanovre. Elle est présentée dans les figures 14.1 et 14.2. Le diagramme se divise en trois blocs, le premier concernant la modélisation de la forme d'onde, le second se concentrant sur la modélisation du détecteur (figure 14.1) et le troisième sur l'analyse de données (figure 14.2). Deux blocs secondaires se dessinent dans la partie détecteur, en distinguant les aspects de dynamique macroscopique de la constellation et la simulation des dispositifs de métrologie du détecteur.

Naturellement, le simulateur développé dans ce travail de thèse s'inscrit dans le bloc détecteur de ce schéma, en particulier dans la partie métrologie. Le sous-module où il intervient est mis en couleur sur la figure : son rôle est d'estimer le bruit d'accélération, élément de contribution principal au bruit de chemin optique à basse fréquence. Cependant, la reproduction de la dynamique du satellite et des masses d'épreuve qu'il nécessite lui permet d'élargir sa participation à divers endroits de ce schéma. Par exemple, dans la partie mouvement macroscopique, l'étude de la dynamique du satellite, influencée principalement par la stratégie de contrôle de *Drag - Free*, peut permettre d'obtenir une estimation plus fidèle de l'évolution de



la distance entre les satellites durant la mission, et de ce fait, des temps de parcours des faisceaux laser le long des bras de l'interféromètre. Il peut également intervenir dans la modélisation du bruit de pointage des télescopes, en étudiant l'influence de l'agitation angulaire des satellites dans le cadre du système en boucle fermée, et éventuellement du mouvement des télescopes, par l'intermédiaire d'une future version du simulateur introduisant ce nouveau degré de liberté.

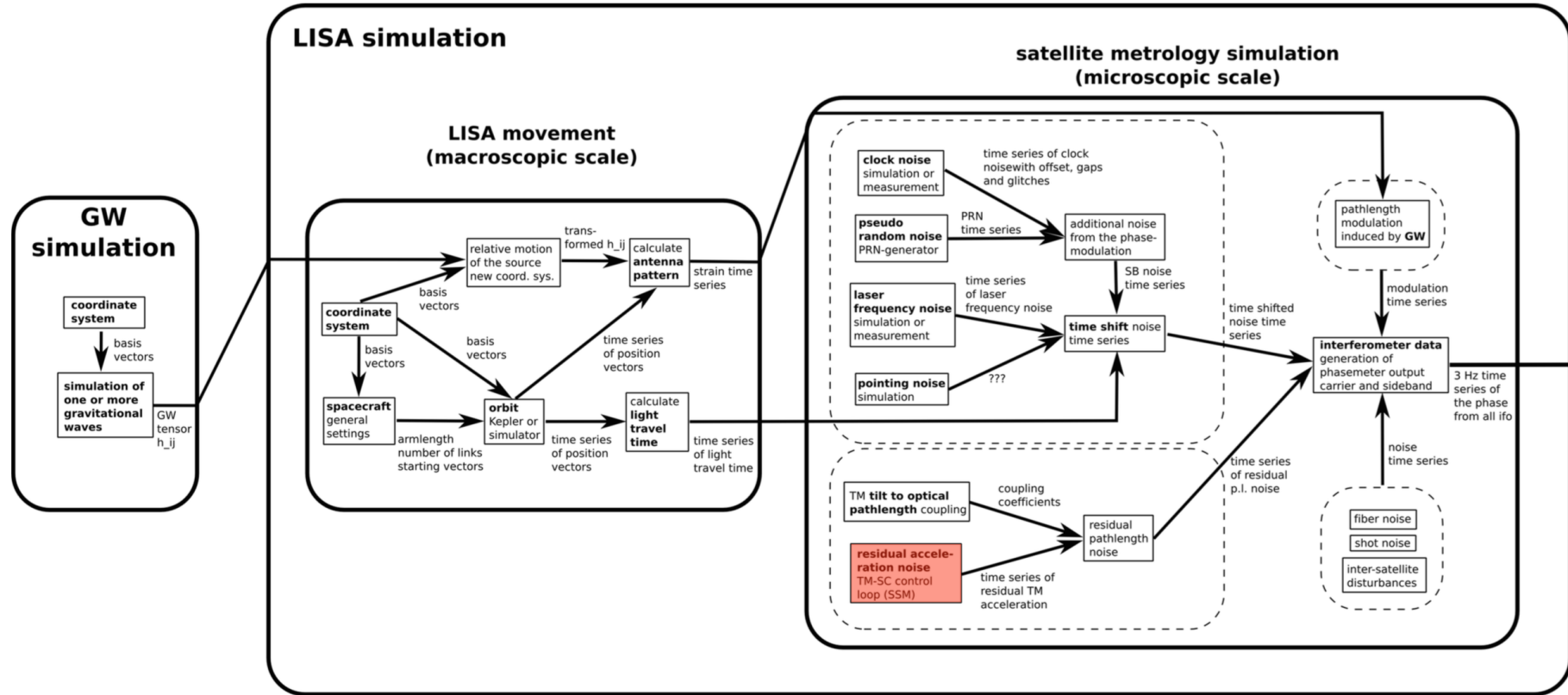


FIGURE 14.1 – Diagramme du simulateur "end-to-end" imaginé par l'équipe eLISA de l'AEI à Hanovre. Sur cette partie du diagramme se distinguent deux blocs principaux, le premier consacré à la simulation du rayonnement gravitationnel, le second dédié à la modélisation de l'instrument. Ce dernier bloc est divisé en deux sous-catégories qui différencient deux ordres d'échelle distincts pour la simulation. Le lieu de contribution naturel de l'outil de simulation présenté dans ce manuscrit est mis en rouge sur le diagramme. Avec l'aimable autorisation de Brigitte Kaune, AEI Hannover.

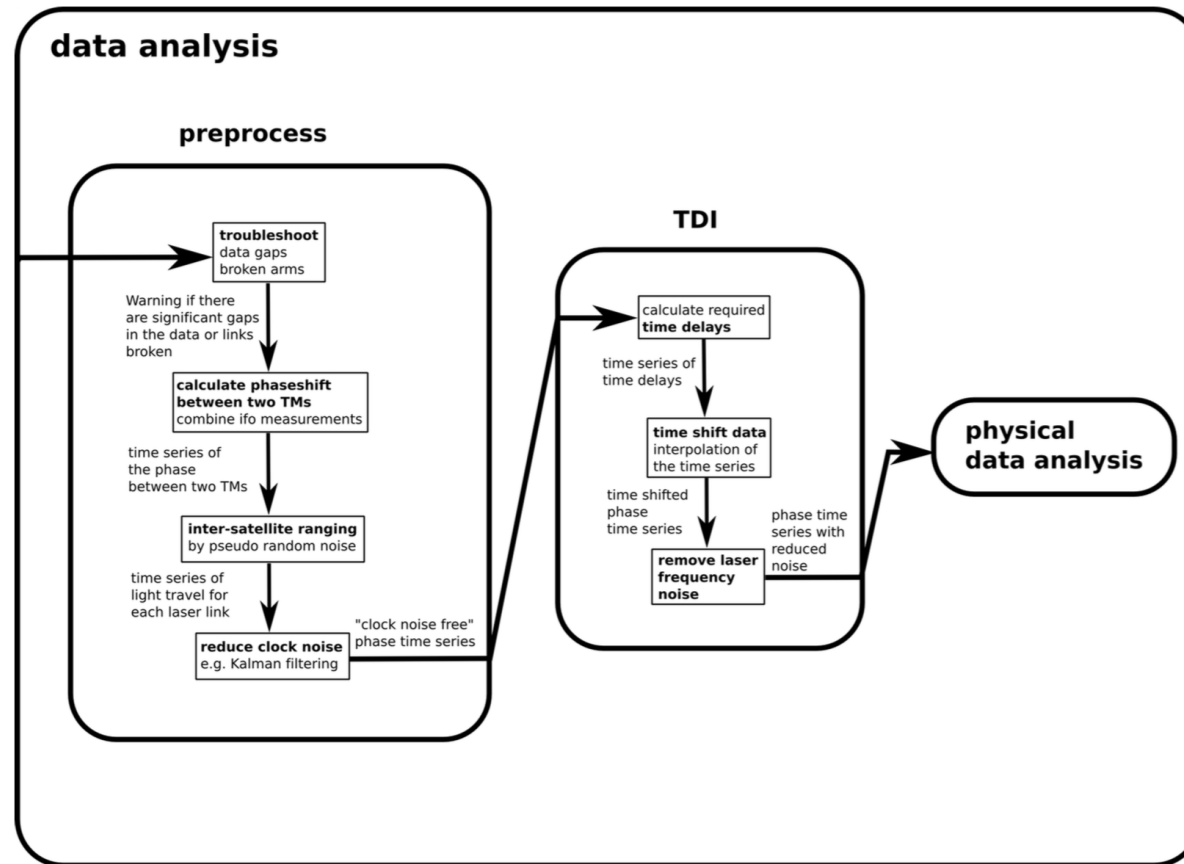


FIGURE 14.2 – Diagramme du simulateur "end-to-end" imaginé par l'équipe eLISA de l'AEI à Hanovre. Cette figure s'enchaîne à la précédente. Le bloc représenté est consacré au traitement et à l'analyse des données simulées. Avec l'aimable autorisation de Brigitte Kaune, AEI Hannover.

# Conclusion

Ce travail de thèse aboutit finalement à la délivrance d'un simulateur reproduisant le comportement dynamique du système en boucle fermée que constitue le triplet *Satellite-Masses d'épreuve*. Il permet d'établir des estimations préliminaires pour une quantité physique d'intérêt majeur, le bruit d'accélération, qui limite la sensibilité du détecteur à basse fréquence et peut, par conséquent, se révéler dommageable pour les objectifs scientifiques dans ce domaine de fréquence. Mais avant tout, le résultat essentiel de ce travail est d'offrir à la communauté scientifique *eLISA* un logiciel de simulation de la dynamique du système, dont l'utilité est multiple. Tout d'abord, il pourrait offrir une participation déterminante dans l'étude des configurations possibles du détecteur *eLISA*, en particulier dans le cadre de la définition de la mission, de ses objectifs scientifiques réalisables et de l'instrument à déployer, effort ayant d'ailleurs été récemment initié par le comité du Gravitational Observatory Advisory Team (*GOAT*). A plus court terme, cet outil fournira également des prévisions de plus en plus fidèles du bruit d'accélération attendu aux équipes de la communauté spécialisées dans l'analyse de données, afin d'obtenir une courbe de sensibilité plus réaliste à basse fréquence. Enfin, comme on l'a vu en fin de discussion, cet outil s'inscrit dans un effort commun de la communauté *eLISA*, engagé par une toute nouvelle équipe de travail, dont l'objectif est la construction d'un simulateur "end-to-end" de grande envergure qui nécessite, bien entendu, la modélisation des aspects dynamiques du détecteur.

Les grandes étapes de la conception de cet outil de simulation exposées dans ce manuscrit sont les suivantes :

- Dans un premier temps, on s'est concentré en partie II sur la définition des équations du mouvement qui gouvernent la dynamique du système *Satellite-Masses d'épreuve*. La principale difficulté réside dans la correcte gestion des différents référentiels introduits pour caractériser la position et l'orientation des trois corps en jeu (cf. section 5.1). A ce titre, on s'est équipé d'un système de convention d'écriture (cf. section 5.2) pour écarter significativement l'essentiel de ces difficultés. Muni de cette convention, on a dégagé les équations de mouvement en trois phases successives qui consistent en l'écriture vectorielle des équations du mouvement dans un référentiel galiléen, leur transposition dans un référentiel non-galiléen à l'aide de la relation de Varignon, pour enfin exprimer cette relation vectorielle dans un système de coordonnées particulier. On aboutit finalement à une expression de la dynamique du système

dans un ensemble de référentiels sélectionnés pour faciliter sa linéarisation (cf. sections 6.3 et 6.4).

- Ensuite, au chapitre 7, on a modélisé cette dynamique par une représentation d'état, dans laquelle toute l'information de l'état dynamique d'un système est contenue dans un vecteur d'état. Cette représentation permet l'utilisation de l'arsenal de l'analyse matricielle pour manipuler, analyser et résoudre les équations de la dynamique, en particulier lorsque celles-ci sont linéaires et stationnaires. La dynamique a d'ailleurs été linéarisée à cet effet, profitant de la présence de la loi de contrôle et de l'expression des équations dans un jeu de référentiels adéquats (cf. section 7.3). Il en résulte une représentation d'état linéaire et stationnaire, se caractérisant par un jeu de matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  indépendantes de l'état dynamique et du temps, qui garantit l'application du principe de superposition (cf. section 7.2.2), utilisé par la suite lors des études de décomposition des influences sur le bruit d'accélération, et légitimise les techniques d'analyse dans le domaine de fréquence.
- Dans la partie III, le modèle dynamique est inscrit dans un système en boucle fermée comprenant la modélisation des actionneurs, des senseurs, de leurs bruit et imperfections associés, ainsi que la loi de contrôle dont l'objectif est de centrer et correctement orienter les masses d'épreuve dans leur compartiment et d'orienter le satellite pour un pointage optimal des télescopes. Les modèles simplifiés utilisés pour les senseurs, les actionneurs, les niveaux de bruit associés et les perturbations directes sont passés en revue dans les sections 8.2, 8.3 et 8.4. On met particulièrement en avant dans ce chapitre les effets de diaphonie d'actionnement, notamment ceux du système capacitif d'actionnement (cf. section 8.3.2), qui joueront un rôle significatif dans le bruit d'accélération observé à haute fréquence. Le couplage entre la dynamique du satellite et celle des masses d'épreuve au travers des forces de raideur est introduit en section 8.4.2. Plus loin, au chapitre 11, on améliore le modèle précédent en utilisant une modélisation plus fidèle des forces de perturbation directes, des actionneurs et des senseurs, elle-même adaptée de modèles et de campagnes de mesure réalisées par la collaboration *LISA Pathfinder*, l'industriel *Airbus Defence & Space* ou le centre de recherche de l'ONERA.
- Enfin, en section 8.5, on présente loi de contrôle mise en place. Les différents éléments de la stratégie de contrôle (*Attitude*, *Drag-Free* et *Suspension*) sont discutés et comparés avec ceux de la mission *LPF*. La fermeture de la boucle étant indispensable pour réaliser toutes les études système nécessaires au test et à l'optimisation du simulateur, on décide d'utiliser les contrôleurs de *LPF* pour construire le système asservi (cf. section 8.5.3). De par la proximité des deux systèmes, cette loi de contrôle s'avère suffisante pour stabiliser la dynamique (cf. section 10.1). Cependant on observera au chapitre 10 qu'une étude plus approfondie des performances de contrôle (cf. section 10.4.1) révèle le caractère non optimal de ces contrôleurs dans le cas de l'expérience *eLISA*. Cette première loi de contrôle a néanmoins constitué une phase importante dans la conception du simulateur, et l'optimisation des contrôleurs semble

dorénavant plus abordable depuis que les différents points d'amélioration clés ont été identifiés (cf. sections 10.1.2, 10.2 et 10.4.1).

Au chapitre 9, on définit la notion de bruit d'accélération et l'on expose la manière dont il est déduit de la dynamique des masses d'épreuve. A partir de l'évolution temporelle des variables dynamiques résultantes de la simulation (cf. section 10.1), on estime le niveau de bruit d'accélération et l'on étudie sa densité spectrale d'amplitude. L'étude dans le domaine fréquentiel (cf. section 10.3) a permis d'étudier l'influence de chaque composante de bruit et de chaque imperfection sur le bruit d'accélération, profitant alors du principe de superposition qui s'applique en vertu de la linéarité du système. Cette étude a mis en évidence le caractère non optimal des contrôleurs utilisés dans le modèle, ayant notamment pour conséquence une forte remontée du bruit d'accélération à haute fréquence, alors gouverné par le bruit des senseurs capacitifs (cf. section 10.4). Pour remédier à cet effet, on a réalisé une modification de la loi de contrôle et parallèlement réduit la diaphonie d'actuation concernée dont la valeur considérable provient d'une marge utilisée par l'industriel *Airbus Defence & Space*.

Finalement, on a observé deux domaines de fréquence pour lesquels des influences dominantes sur le bruit d'accélération se distinguent, selon la figure 11.7 :

- Dans le domaine des basses fréquences, entre  $10^{-5}\text{Hz}$  et  $2.10^{-3}\text{Hz}$ , le bruit d'accélération est gouverné par les forces perturbatrices directes. La nature et l'amplitude de ces dernières sont discutées en sections 11.1.1 et 11.3. Les forces d'origine magnétique semblent dominer cette influence aux plus basses fréquences, tandis que dans le domaine intermédiaire, à partir de 2 mHz, le bruit blanc brownien dirige le comportement du bruit d'accélération jusqu'aux alentours de 6mHz.
- A haute fréquence, entre  $6.10^{-3}\text{Hz}$  et  $1.10^{-1}\text{Hz}$ , le bruit d'accélération est gouverné par le bruit du système de micropropulsion. L'autorité de la boucle *Drag-Free* étant très affaiblie dans ce domaine de fréquence (cf. figure 8.15), le mouvement du satellite est entièrement soumis à son bruit de propulsion. Les masses d'épreuve s'agitent alors d'autant plus fortement par rapport au satellite, et ce mouvement relatif induit des forces sur la masse d'épreuve par l'intermédiaire des effets de raideur. A plus haute fréquence encore, cet effet diminue, d'une part, parce que le gain des contrôleurs *Drag-Free* remonte sensiblement, et d'autre part, à cause de l'inertie du satellite qui l'insensibilise progressivement (en  $1/f^2$ ) au bruit de micropropulsion haute fréquence.

Si l'on aperçoit facilement les possibilités offertes par cet outil de simulation, il n'en reste pas moins un certain nombre d'ajustements à réaliser pour prétendre pleinement à de telles ambitions, du moins si on les souhaite quantitatives. En premier lieu, l'optimisation des contrôleurs s'avère primordiale. On a observé en 10.4.1 l'importante influence des performances de contrôle sur le niveau de bruit d'accélération. La modification de la loi de contrôle, obtenue pour l'instant à partir de LISA Pathfinder, nous paraît constituer la priorité numéro un. Ensuite, on a pris conscience en section 13.4 des complications induites par le désaccord ente axe sensible et axe

*Drag-Free* sur l'interprétation du bruit d'accélération, et en particulier sur son lien avec la courbe de sensibilité. La mobilité des télescopes réduit significativement cette discordance. Il nous paraît alors essentiel d'intégrer ce degré de liberté dynamique supplémentaire dans le modèle. Dans le même contexte, et peut-être dans un premier temps, on devra également modéliser de manière plus réaliste le contrôle d'attitude en introduisant une communication entre les satellites dans le modèle, qui à ce jour, considère les satellites indépendamment les uns des autres. Ces aspects nous apparaissent comme la priorité numéro deux. Enfin, une modélisation plus fidèle de l'ensemble des sous-modules intégrés dans la boucle d'asservissement sera bien entendu nécessaire. Ce travail profitera considérablement de l'expérience acquise par l'intermédiaire de la mission *LPF*. Il nécessitera probablement une participation plus large de la collaboration et représente un effort à plus long terme.

On garde à l'esprit que tout outil de simulation est par essence imparfait. Un modèle reproduisant exactement le comportement physique d'un système est bien entendu inenvisageable. Il s'agit alors de trouver le meilleur compromis entre flexibilité, rapidité et souplesse, favorisant la simplicité du modèle, et précision et fidélité de la simulation, qui encouragent, quant à elles, un accroissement de la complexité. Les ambitions qui motivent la confection du modèle doivent déterminer ce compromis. Dans notre cas, selon que l'outil proposé dans ce manuscrit s'intègre dans le simulateur "end-to-end", présenté au chapitre 14 ou s'attache à dégager la courbe de sensibilité de l'instrument, la complexité souhaitée n'est éventuellement pas la même. Ces aspects-là, et de manière plus générale, la place de cet outil dans l'effort de la collaboration, sont entre autres choses discutés au sein d'un nouveau groupe de travail de la communauté *LISA*, dénommé "Simulation Working Group", concerné par toutes les activités de simulation dans la communauté.

# Annexe A

## Activités menées au sein de la communauté LISA Pathfinder

Le lancement imminent de la mission LISA Pathfinder [42], prévu pour le dernier trimestre 2015, a sollicité durant ces trois années de thèse un effort croissant de la communauté scientifique, notamment dans la préparation de l'analyse de données. Le but de ce travail était d'aboutir à une définition précise des objectifs scientifiques, en terme de produit scientifique délivré par la mission, et à la mise en place de stratégies d'investigation et de procédures d'analyse des observations fournies par le satellite. Ainsi, de multiples investigations ont été conçues afin d'étudier diverses caractéristiques de l'instrument (charge électrique résiduelle des masses d'épreuve, forces de raideur et diaphonie d'actuation...). Pour chacune d'entre elles, une procédure d'analyse a été imaginée, développée et intégrée à la boîte à outils *LTPDA* [27] en constant développement par la communauté. Cette boîte à outil, développée sous MATLAB, permet le téléchargement, la gestion et le traitement de multiples flux de données de l'instrument, et intègre les étapes clefs des procédures d'analyse de l'ensemble des investigations prévues<sup>1</sup>, qui s'accompagnent d'un script d'exécution standard et d'une documentation associée.

Plusieurs campagnes de simulation des opérations ont été menées tout au long de ces trois années. L'objectif était de placer la communauté en condition de mission et de tester son niveau de préparation. Un simulateur technique dénommé Offline Simulations Environment (*OSE*), développé par l'industriel *Airbus Defence & Space* et piloté par l'ESA, était chargé de reproduire l'activité du satellite, lequel était soumis à tout un programme d'investigations successives. Plusieurs équipes, organisées dans un cadre opérationnel, avaient alors la charge de recueillir, traiter et interpréter les données fournies par le simulateur. C'était alors l'occasion pour la communauté de tester ces procédures et algorithmes qui, au fur et à mesure des exercices, se sont précisés et affinés. Actuellement, la communauté redouble d'effort pour converger rapidement vers une stratégie d'opération et un ensemble de procédures les plus

---

1. Ces procédures sont appelées *pipelines* et comportent une succession d'étapes, allant du téléchargement des données jusqu'à la production de l'observable désirée



aboutis possibles.

## A.1 Identification système

Mon engagement lors ces multiples campagnes de simulation s’est principalement focalisé sur les investigations dites *d’identification système*. Le principe est d’exciter la boucle d’asservissement des masses d’épreuve<sup>2</sup> par l’injection d’un signal d’erreur et d’étudier la réponse du système afin d’en extraire certaines caractéristiques physiques.

Une expérience typique, dénommée *TN3045*, consiste à injecter des signaux d’erreur  $g_1$  et  $g_{12}$ , ou signaux de guidage, qui s’ajoutent aux mesures interférométriques  $o_1$  et  $o_{12}$  des variables dynamiques  $x_1$  et  $x_{12}$ <sup>3</sup>. Le système se comporte alors comme si l’on avait modifié la trajectoire de consigne à traquer, le vecteur d’état dynamique de consigne étant nul avant l’injection. La loi de contrôle va devoir commander des forces afin d’ajuster la position des masses d’épreuve de manière à annuler ce signal d’erreur artificiel. On peut alors étudier la réponse du système à ces forces commandées par l’intermédiaire de l’évolution des observables  $o_1$  et  $o_{12}$ . Cette réponse dépendra explicitement de certaines propriétés physiques du système tels les forces de raideur couplant la dynamique du satellite à celle des masses d’épreuve, les gains des actuateurs et les éventuels délais temporels.

Cette expérience sera réalisée en vol et on étudiera l’évolution des observations interférométriques  $o_1^{data}$  et  $o_{12}^{data}$ . Ces dernières seront comparées avec les prédictions d’un modèle paramétrique  $\lambda(\vec{\theta}, \vec{i}(t))$  dépendant d’un ensemble de paramètres physiques  $\vec{\theta}$  et de séries temporelles en entrée  $\vec{i}(t)$  :

$$\begin{bmatrix} o_1^{mod}(t) \\ o_{12}^{mod}(t) \end{bmatrix} = \lambda(\vec{\theta}, \vec{i}(t)) \quad (\text{A.1})$$

On distingue deux types de modèles utilisés pour l’identification système. Un premier [25] se place dans le domaine des accélérations et étudie la réponse du système dynamique, des actuateurs et des senseurs **en boucle ouverte**, en utilisant les forces commandées par le *DFACS* du satellite et délivrées au sol. Il consiste à étudier les dérivées secondes  $\ddot{o}_1^{data}$  et  $\ddot{o}_{12}^{data}$  en retranchant la contribution provenant de l’injection, qui se résume essentiellement à l’application des forces commandées et aux effets de raideur<sup>4</sup> :

---

2. Au même titre que pour *eLISA* précédemment, elle implique les stratégies de contrôle de *Drag-Free* et de *Suspension* (cf. figure 8.13). A noter que dans *LPF*, en ce qui concerne la masse d’épreuve numéro 2, seule la variable **différentielle**  $x_{12}$  est observée par l’interféromètre et sollicitée dans la boucle. Cette variable dynamique est gérée par le contrôle en *Suspension*.

3. On rappelle que  $x_1$  dénote la position du centre des masses de la masse d’épreuve numéro un par rapport au centre *H1* de son compartiment, et  $x_{12}$  décrit la distance relative entre les masses.

4. Des modèles plus sophistiqués incluant des effets de diaphonie où différents délais peuvent être également considérés.

$$\begin{bmatrix} a_{S/C}^{res}(t) \\ a_{12}^{res}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{o}_1^{data}(t) - \ddot{o}_1^{mod}(t) \\ \ddot{o}_{12}^{data}(t) - \ddot{o}_{12}^{mod}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

avec :

$$\ddot{o}_1^{mod}(t) = -\frac{A_{MPS} F_{S/C,X}^{cmd}(t)}{m_{S/C}} + \Omega_{1,XX}^2 o_1^{data}(t) \quad (\text{A.3})$$

$$\ddot{o}_{12}^{mod}(t) = \frac{A_{SUS} F_{2,X}^{cmd}(t)}{m_2} + \Omega_{2,XX}^2 o_{12}^{data}(t) + (\Omega_{2,XX}^2 - \Omega_{1,XX}^2) o_1^{data}(t) \quad (\text{A.4})$$

Ici, le modèle est construit à partir du jeu de paramètres suivants, respectivement le gain des micropropulseurs, le gain du système capacitif d'actuation et les termes de couplage traduisant les effets de raideur suivant l'axe  $\vec{X}$ <sup>5</sup> entre le satellite et les masses d'épreuve :

$$\vec{\theta} = [A_{MPS} \quad A_{SUS} \quad \Omega_{1,XX}^2 \quad \Omega_{2,XX}^2] \quad (\text{A.5})$$

et les séries temporelles d'entrée sont respectivement les forces commandées au système de micropropulsion du satellite pour corriger  $x_1$  (*Drag-Free*), les forces commandées au système capacitif pour corriger  $x_{12}$  (*Suspension*), et les observations interférométriques du déplacement des masses.

$$\vec{i}(t) = [F_{S/C,X}^{cmd}(t) \quad F_{2,X}^{cmd}(t) \quad o_1^{data}(t) \quad o_{12}^{data}(t)] \quad (\text{A.6})$$

Après la soustraction du signal d'injection des accélérations relatives observées  $\ddot{o}_1^{data}$  et  $\ddot{o}_{12}^{data}$ , on se retrouve avec les estimations de l'accélération résiduelle du satellite  $a_{S/C}^{res}(t)$  et de l'accélération résiduelle différentielle  $a_{12}^{res}(t)$  entre les masses d'épreuve. Dans le cas d'un modèle parfait, le signal en provenance de l'injection est idéalement retranché des observations et les accélérations résiduelles sont les reflets des différentes sources de bruit et de perturbations s'exerçant sur le système.

Un second type de modèle se place cette fois-ci dans le domaine des déplacements. Il sollicite donc l'intégration des différentes forces et couples appliqués sur les trois corps. On utilise un modèle en représentation d'état du système *LPF* développé par la communauté et disponible dans *LTPDA*. Le principe est de simuler l'investigation, à partir de ce modèle State Space Model (*SSM*)<sup>6</sup>, en estimant la réponse du système **en boucle fermée** modélisé aux injections  $g_1$  et  $g_{12}$  appliquées en entrée.

---

5. Dans *LPF*, les référentiels des compartiments *H1* et *H2* sont orientés de la même manière que le référentiel *B* du satellite. On a donc  $\vec{e}_{x,B} = \vec{e}_{x,H1} = \vec{e}_{x,H2}$ , où l'on reprend pour l'occasion la convention d'écriture établie en section 5.1.

6. *State Space Model*

Le modèle ne peut reconstituer que le signal pur induit par l'injection et n'inclut aucun bruit ni perturbation. Le simulateur fournit alors l'évolution temporelle des mesures interférométriques  $o_1^{SSM}$  et  $o_{12}^{SSM}$  induite par les excitations du système. A nouveau, si le modèle permet de reconstituer parfaitement le signal, les résidus sont le reflet direct des niveaux de bruit de déplacement des masses.

$$\begin{bmatrix} o_1^{res}(t) \\ o_{12}^{res}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_1^{data}(t) - o_1^{SSM}(t) \\ o_{12}^{data}(t) - o_{12}^{SSM}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Dans les deux cas, on construit un estimateur de la vraisemblance<sup>7</sup> du modèle dans le domaine fréquentiel. Dans le cas de *SSM*, on estime la vraisemblance du modèle de la manière suivante, qui suppose un bruit de statistique gaussienne [43] :

$$\log \mathcal{L}(\vec{\theta}) = -2 \sum_f \frac{\left[ \tilde{o}_{12}^{data}(f) - \tilde{o}_{12}^{SSM}(f, \vec{\theta}) \right] \overline{\left[ \tilde{o}_{12}^{data}(f) - \tilde{o}_{12}^{SSM}(f, \vec{\theta}) \right]}}{S_n(f)} \quad (\text{A.8})$$

où  $\tilde{o}_{12}^{data}$  et  $\tilde{o}_{12}^{SSM}$  sont respectivement les transformées de Fourier<sup>8</sup> des données et des prédictions du modèle *SSM*. Le terme  $S_n(f)$  correspond à la densité spectrale de puissance (*DSP*) du bruit s'ajoutant au signal. Ce bruit correspond au déplacement des masses d'épreuve que l'on observerait même en l'absence du signal d'excitation. En pratique, des périodes relativement longues d'investigation, dites de "*bruit seul*", c'est-à-dire sans aucune injection appliquée dans la boucle d'asservissement, sont réservées à l'estimation du comportement spectral de ce bruit. Cette estimation de la *DSP* du bruit est alors directement utilisée à l'équation A.8 afin de pondérer la probabilité de l'écart observé entre les données et le modèle par le niveau de bruit pour chaque canal de fréquence. On s'aperçoit alors que cette définition de la vraisemblance est non seulement dépendante du choix du modèle utilisé (nombre de paramètres, linéarités...) mais également de la qualité de l'estimation du niveau de bruit. On se retrouve alors, pour les investigations d'identification système, dépendant d'une part, de la réussite des investigations de bruit, et d'autre part de l'hypothèse de sa stationnarité. La communauté *LPF* a également étudié la définition d'estimateurs de la vraisemblance ne dépendant pas explicitement d'une connaissance a priori du comportement spectral du bruit [44]. Le choix entre ces deux estimateurs est accessible dans *LTPDA*.

---

7. c'est-à-dire la probabilité d'obtenir le jeu de données observées en supposant que le signal et le modèle correspondent exactement

8. Tous les spectres sont issus d'un fenêtrage préalable des séries temporelles de type Blackman-Harris et les premières fréquences sont exclues de la série fréquentielle pour cause de faible statistique et d'influence potentielle des composantes très basse fréquence à l'extérieur du domaine fréquentiel d'observation.

## A.2 MCMC Hammer

### A.2.1 Eléments d'analyse bayésienne

Dans le cadre de l'analyse bayésienne, l'optimisation des paramètres  $\vec{\theta}$  d'un modèle  $\lambda$  par rapport à un jeu de données observées  $D$  est étudiée en terme de probabilités. En particulier, l'ajustement de ces paramètres est réalisé en maximisant la densité de probabilité conditionnelle  $p(\vec{\theta}/D)$ , appelée *distribution postérieure*<sup>9</sup>, et correspondant à la probabilité que les données observées proviennent effectivement du jeu de paramètres  $\vec{\theta}$ <sup>10</sup>. L'inférence de cette distribution postérieure permet d'accéder non seulement au jeu de paramètres le plus probable du modèle concerné compte tenu des observations réalisées, mais également aux notions d'erreur et de corrélation statistiques à partir de la géométrie de cette distribution généralement multidimensionnelle.

Il existe une relation fondamentale entre la fonction de vraisemblance donnée à l'équation A.8 et cette distribution postérieure. Elle dérive d'une propriété de base des probabilités conditionnelles appelée loi de Bayes [19] :

$$p(\vec{\theta}/D) = \frac{p(\vec{\theta})}{p(D)} p(D/\vec{\theta}) = \frac{p(\vec{\theta})}{p(D)} \mathcal{L}(\vec{\theta}) \quad (\text{A.9})$$

où l'on explicite la correspondance  $\mathcal{L}(\vec{\theta}) = p(D/\vec{\theta})$ . La probabilité  $p(D)$  s'interprète comme la probabilité totale d'obtenir les données  $D$  en considérant l'ensemble des valeurs possibles prises par les paramètres  $\vec{\theta}$ . Elle est donc indépendante de toute réalisation  $\vec{\theta}$  et tient le rôle de constante de normalisation de la distribution postérieure lors du processus d'ajustement. On considère généralement en pratique une distribution postérieure non-normalisée en omettant cette fonction de probabilité. En revanche, la probabilité  $p(\vec{\theta})$  dépend quant à elle explicitement de la réalisation  $\vec{\theta}$  et est appelée *prior*. Elle désigne notre connaissance a priori de la loi de probabilité gouvernant les réalisations  $\vec{\theta}$ , c'est-à-dire avant l'observation des données  $D$ .

### A.2.2 Algorithme MCMC

L'enjeu de l'estimation des paramètres  $\vec{\theta}$  à partir des données observées  $D$  revient donc essentiellement à représenter la distribution postérieure  $p(\vec{\theta}/D)$ , qui dans le cas d'un prior uniforme, s'identifie à la vraisemblance  $\mathcal{L}(\vec{\theta})$ . Cette distribution peut s'avérer hautement multivariée, et sa détermination nécessite généralement de parcourir un espace de dimension élevée (typiquement  $\sim 5$ -10 paramètres). L'évaluation sur une grille de coordonnées  $\vec{\theta}$  de la vraisemblance est souvent irréalisable en

---

9. par la suite *fdp* pour *fonction de densité postérieure*

10. en supposant néanmoins l'exactitude de la structure du modèle  $\lambda$

pratique. On peut alors avoir recours à des méthodes stochastiques dites de Monte-Carlo, qui permettent de parcourir l'espace des paramètres de manière probabiliste, avec une probabilité de passage accentuée près des zones d'intérêt. C'est le principe des méthodes Monte-Carlo Markov Chain (*MCMC*)<sup>11</sup>.

L'objectif de toute méthode Monte-Carlo par chaînes de Markov est d'aboutir à une chaîne de  $N$  éléments  $\vec{\theta}^{(t)}$  dont la distribution statistique converge vers la loi de probabilité à représenter, dans notre cas  $p(\vec{\theta}/D)$ . Il engage un processus itératif et stochastique qui construit élément par élément une chaîne de Markov, dont par définition l'élément d'indice ( $t$ ) ne doit dépendre que de l'élément précédent d'indice ( $t - 1$ ). Cette suite d'éléments  $\vec{\theta}^{(t)}$  est construite par récurrence de deux phases :

- **La phase de proposition** : l'élément  $\vec{Y}$  est proposé avec une certaine probabilité, appelée *probabilité de transition* et notée  $Q(\vec{\theta}^{(t)} \rightarrow \vec{Y})$ , à partir de l'élément courant de la chaîne  $\vec{\theta}^{(t)}$ .
- **La phase d'acceptation** : la proposition  $\vec{Y}$  est acceptée avec une certaine probabilité, dite *probabilité d'acceptation*. Dans le cas où  $\vec{Y}$  est effectivement accepté, il devient l'élément suivant de la chaîne ( $\vec{\theta}^{(t+1)} = \vec{Y}$ ). Sinon, l'élément suivant de la chaîne se maintient à l'élément courant ( $\vec{\theta}^{(t+1)} = \vec{\theta}^{(t)}$ ).

Le premier élément de la chaîne est déterminée par l'utilisateur. En pratique il est tiré aléatoirement dans une zone d'intérêt de l'espace de paramètres, et la taille de cette zone est à ajuster en fonction du problème.

## Principe de l'algorithme "The MCMC Hammer"

Une méthode *MCMC* particulièrement intéressante, en particulier en ce qui concerne les problèmes largement multivariés dont l'estimation de la vraisemblance est coûteuse en temps de calcul, est développée dans l'algorithme proposé par [14] et dénommé "The MCMC Hammer"<sup>12</sup>. Cet algorithme est plus précisément une implémentation en langage *Python* de la méthode Monte-Carlo proposée par les mathématiciens Goodman and Weare [20]. Dans leur publication, ces derniers proposent une méthode *MCMC*<sup>13</sup> impliquant des chaînes multiples qui communiquent entre elles et présentent la propriété remarquable d'invariance affine. Cette propriété témoigne de l'insensibilité de l'algorithme à toute transformation affine des paramètres  $\vec{\theta}$  et traduit donc une insensibilité de ses performances à une forte disparité des ordres de grandeur des éléments du vecteur  $\vec{\theta}$ <sup>14</sup>. De plus, l'aspect multi-chaîne offre l'op-

---

11. Monte-Carlo Markov Chain

12. <http://dan.iel.fm/emcee/current/>

13. qu'il nomme *stretch-move algorithm*

14. Avec un algorithme *MCMC* de type Metropolis-Hastings, grand classique du genre et très largement éprouvé, ce problème est régulièrement rencontré. La probabilité de transition d'un élément à l'autre de la chaîne (phase de proposition) joue un rôle clef dans la rapidité de convergence de la chaîne. Un mauvais conditionnement de la matrice de covariance de la distribution des paramètres  $\vec{\theta}$  recherchés (on parle alors de distribution hautement anisotropique [20]) complique quelque peu la sélection d'une probabilité de transition optimale.

portunité d'une parallélisation de l'exécution de l'algorithme qui peut apporter un gain de temps considérable surtout lorsque l'évaluation numérique de la fonction de vraisemblance en un point  $\vec{\theta}$  s'avère relativement lente.

Dans cette méthode, on construit non pas une chaîne de Markov mais un ensemble, noté  $S = \{\vec{\theta}_k\}$ , de  $K$  chaînes de Markov appelées *marcheurs*. Pour construire l'élément suivant  $(t+1)$  d'un marcheur  $k$  particulier, on implique non seulement l'élément courant  $\theta_k^{(t)}$  mais aussi potentiellement la position courante de chaque marcheur  $j \neq k$  de l'ensemble complémentaire à  $k$ ,  $S[k] = \{\vec{\theta}_j, \forall j \neq k\}$ . L'algorithme est le suivant :

1. On choisit arbitrairement le premier élément des  $K$  chaînes  $\vec{\theta}_k^{(0)}$ .
2. Pour mettre à jour la position d'un marcheur  $k$  sachant  $\vec{\theta}_k^{(t)}$ , on va utiliser la position courante  $(t)$  d'un marcheur  $j$  tiré aléatoirement parmi l'ensemble complémentaire  $S[k]$  et faire la proposition  $\vec{Y}$  suivante :

$$\vec{\theta}_k^{(t)} \rightarrow \vec{Y} = \vec{\theta}_k^{(t)} + Z \left( \vec{\theta}_k^{(t)} - \vec{\theta}_j^{(t)} \right) \quad (\text{A.10})$$

où  $Z$  est une variable aléatoire de distribution  $g(z = Z)$ . C'est grâce à cette construction de la proposition à l'équation A.10 que l'on obtient un algorithme invariant affine [20]. Il reste tout de même à assurer la convergence de la chaîne vers la *fdp* désirée. La première condition est que la probabilité de transition de  $\vec{\theta}_k^{(t)}$  vers  $\vec{Y}$  soit égale à sa réciproque :

$$Q \left( \vec{\theta}_k^{(t)} \rightarrow \vec{Y} \right) = Q \left( \vec{Y} \rightarrow \vec{\theta}_k^{(t)} \right) \quad (\text{A.11})$$

Ce qui implique la symétrie de la distribution  $g(z)$  [20] :

$$g(z^{-1}) = zg(z) \quad (\text{A.12})$$

En particulier, il est préconisé [14] d'utiliser l'expression de  $g(z)$  suivante, où l'on pourra optimiser le paramètre d'échelle  $a$  directement lié à l'écart entre la proposition et l'élément présent de la chaîne :

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{z}} & \text{si } z \in \left[ \frac{1}{a}, a \right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Ajuster le paramètre d'échelle  $a$  peut s'avérer utile lorsque l'on souhaite par exemple éviter que l'algorithme ne soit contraint autour de certains maxima locaux de la *fdp*. On a alors la possibilité d'augmenter la valeur de  $a$  pour donner plus de chances à la chaîne de s'échapper de ces extrema. Plus généralement, l'augmentation de ce paramètre d'échelle encourage les *marcheurs* à parcourir une zone plus vaste de l'espace des paramètres, en élargissant leur saut de transition moyen lors de la phase de proposition.

3. A partir de cette proposition, la convergence vers la *fdp* cible est assurée en construisant la probabilité d'acceptation suivante :

$$A\left(\vec{Y}/\vec{\theta}_k^{(t)}\right) = \min\left(1, Z^{N-1} \frac{p\left(\vec{Y}/D\right)}{p\left(\vec{\theta}_k^{(t)}/D\right)}\right) \quad (\text{A.14})$$

Ce qui assure la condition d'équilibre et la convergence vers la loi stationnaire  $p\left(\vec{\theta}/D\right)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

4. Les étapes 2 et 3 sont répétées jusqu'à atteindre une longueur de chaîne suffisante, notée  $L$ , pour obtenir la statistique désirée. Au final, nous obtenons grâce à cet algorithme  $K$  chaînes de  $L$  éléments dont la distribution statistique constitue une représentation approchée de la *fdp*. En combinant ces chaînes, on construit une distribution statistique de  $K \times L$  réalisations.

## Indices de performance

L'article [14] propose deux indices quantitatifs pour l'analyse de la convergence des chaînes vers la *fdp*. En premier lieu, le temps d'autocorrélation intégré  $\tau_{int}$  donne une estimation du nombre d'évaluations de la vraisemblance nécessaire pour obtenir un ensemble de réalisations indépendantes de la *pdf* cible. Il est lié à la durée  $\tau = t - t'$  minimale nécessaire à ce que deux éléments distincts d'une chaîne  $\vec{\theta}_k^t$  et  $\vec{\theta}_k^{t'}$  puissent être considérés comme indépendants. Cette indépendance est mesurée par la fonction d'autocovariance de la chaîne :

$$C_f(T) = \lim_{t \rightarrow +\infty} cov\left[\vec{\theta}_k^{(t+T)}, \vec{\theta}_k^{(t)}\right] \quad (\text{A.15})$$

où *cov* représente la fonction de covariance, évaluée en l'occurrence entre les variables aléatoires  $\vec{\theta}_k^{(t+T)}$  et  $\vec{\theta}_k^{(t)}$ . Le temps d'autocorrélation  $\tau$  correspond au temps  $T$  nécessaire à ce que  $C_f(T) \rightarrow 0$ . Une quantité particulièrement pertinente pour estimer l'efficacité de la chaîne de Markov est le temps d'autocorrélation intégré  $\tau_{int}$ , qui peut s'écrire comme [14] :

$$\tau_{int} = \sum_{T=-\infty}^{+\infty} \frac{C_f(T)}{C_f(0)} = 1 + 2 \sum_{T=1}^{+\infty} \frac{C_f(T)}{C_f(0)} \quad (\text{A.16})$$

Cette quantité signifie que l'on obtient une statistique effective de  $\frac{K \times L}{\tau_{int}}$  réalisations indépendantes de la *fdp* cible. Le temps d'autocorrélation intégré constitue alors une information de premier intérêt au sujet de la convergence de la statistique de la chaîne vers la *fdp* cible, et permet ainsi de sélectionner la longueur de chaîne nécessaire pour atteindre la statistique effective souhaitée.

Le second indice est la proportion  $a_f$  des propositions  $\vec{Y}$  acceptées durant le processus de construction de la chaîne. Il n'existe pas de consensus autour d'une valeur privilégiée que devrait prendre cette quantité pour une convergence optimale. Cependant, lorsque  $a_f$  est trop faible, la grande majorité des propositions sont rejetées

et la chaîne possédera au final qu'un très faible nombre de réalisations indépendantes. À l'inverse, lorsque  $a_f$  est trop proche de 1, la majorité des propositions sont acceptées et la marche aléatoire est réalisée sans tenir compte ou presque de la *fdp* cible. En tant que compromis, l'article [14] préconise l'intervalle  $0,2 - 0,5$  pour ce taux.

Pour ajuster ces deux indices, on dispose principalement du nombre de marcheurs  $K$ , de la longueur des chaînes  $L$ , du paramètre de température  $a$  et éventuellement de la position initiale des marcheurs. En particulier, le taux d'acceptation s'optimise en jouant sur le paramètre de température  $a$ . Lorsque le taux est trop faible, cela peut signifier que la transition entre la position courante et la proposition est trop élevée, cette dernière s'écartant de manière abrupte de la zone d'intérêt de plus grande vraisemblance. Abaisser le paramètre de température diminue la probabilité de proposer de telles transitions. À l'inverse, l'augmenter permet d'explorer des régions plus étendues de l'espace des paramètres. En général, il est recommandé d'utiliser un large nombre de marcheurs, car ces derniers sont indépendants les uns des autres par construction [20], ce qui augmente le nombre total de réalisations indépendantes. La parallélisation de l'exécution permet de plus de gérer simultanément l'avancée de groupes de marcheurs. La longueur de la phase dite de *burn-in*, nécessaire pour atteindre la stationnarité de la chaîne et son indépendance aux positions initiales, doit être également ajustée et doit généralement représenter plusieurs fois le temps d'autocorrélation intégré de la chaîne.

### A.2.3 Exemple de résultats obtenus

L'algorithme *MCMC Hammer* connaît un certain succès dans le domaine de l'astrophysique et est utilisé dans le cadre de divers projets. Initialement implémenté en langage Python, il a été porté par Alex Conley<sup>15</sup> vers une version *C++* disponible à l'adresse [https://github.com/aconley/pofd\\_affine](https://github.com/aconley/pofd_affine). De plus, le laboratoire *APC* a réalisé le portage de la classe *SSM* de *LTPDA* en *C++*, ce qui a permis de connecter ces deux objets dans l'objectif de profiter du nombre important de *CPU* du cluster *Arago* du *FACe*<sup>16</sup>. La parallélisation massive qu'il permet rend l'outil développé extrêmement performant en terme de temps de calcul.

On illustre l'utilisation de cet algorithme sur les investigations de type système identification "*TN3045*" (cf. section A.1) pratiquées lors de l'exercice dénommé *Pre-SOVT1.13*<sup>17</sup>. Durant ces investigations, le satellite est en mode scientifique nominal<sup>18</sup> et des injections sont réalisées sur le signal d'erreur (cf. figure A.1) correspon-

---

15. University of Colorado, Boulder

16. *François Arago Centre*, laboratoire *APC*

17. Il s'agit d'un ensemble de 13 exercices dédié au test du simulateur fonctionnel mis en place par l'ESA début 2015 et à la préparation de l'exercice test System Operations Validation Test (*SOVT*), ce dernier ayant eu lieu en février 2015 au centre des opérations du Science and Technology Operations Centre (*STOC*) au centre de l'ESA de Darmstadt.

18. stratégie de contrôle *Drag-Free* opérationnelle, mesure interférométrique sollicitée pour le contrôle



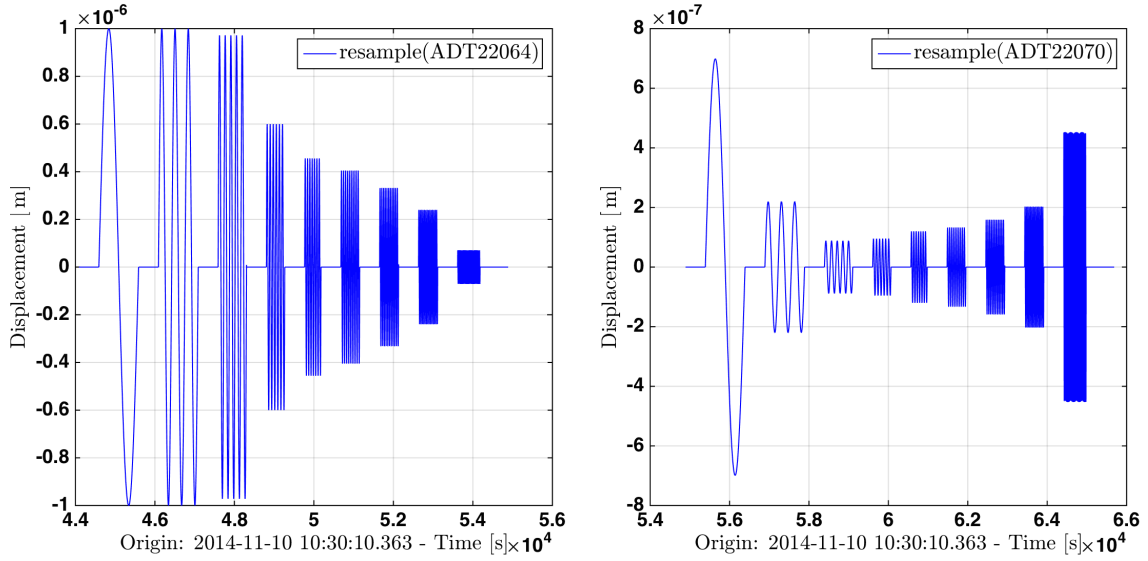


FIGURE A.1 – Séries temporelles des injections successives délivrées suivant les voies  $o_1$  (à gauche) et  $o_{12}$  (à droites). Elles consistent en les successions de plusieurs signaux sinusoïdaux d’excitation de fréquence et d’amplitude distinctes afin de sonder la fonction de réponse du système dans plusieurs domaines de fréquence.

dant aux voies de mesure  $o_1$  et  $o_{12}$ . Ces injections modifient les signaux de consigne à traquer qui ne sont plus nuls durant cette phase d’investigation.

On étudie alors la réponse à cette excitation du système en boucle fermée en observant les sorties  $o_1^{data}$  et  $o_{12}^{data}$ . On réalise une excitation similaire du modèle  $SSM$  du système asservi ce qui permet de comparer les prédictions obtenues  $o_1^{SSM}$  et  $o_{12}^{SSM}$  aux observations. Le modèle  $SSM$  contient un jeu de paramètres *symboliques*  $\vec{\theta}$  qui seront ajustés durant le processus  $MCMC$ . Ces paramètres sont les suivants :

$$\vec{\theta} = [A_{MPS} \quad A_{SUS} \quad \Omega_{1,XX}^2 \quad \Omega_{2,XX}^2 \quad p_{MPS} \quad p_{CAPACT} \quad T_{delay}^{o1} \quad T_{delay}^{o12}] \quad (A.17)$$

où les quantités  $p_{MPS}$  et  $p_{CAPACT}$  sont les pôles des fonctions de transfert d’actuation traduisant la durée d’établissement de la commande. Les termes  $T_{delay}^{o1}$  et  $T_{delay}^{o12}$  sont des délais purs supplémentaires introduits artificiellement pour tenir compte des éventuels défauts d’étiquetage temporel des données transmises par le satellite.

Pour l’ajustement des paramètres  $\vec{\theta}$  du modèle  $\lambda^{SSM}$  supposé, on utilise la vraisemblance définie à l’équation A.8, qui est sollicitée dans le processus  $MCMC$  au niveau de l’expression de la probabilité d’acceptation (en confondant la  $fdp$  et la vraisemblance dans le cas d’un prior uniforme). Le modèle de bruit  $S_n$  provient d’une estimation de la  $DSP$  bruit réalisée à partir d’une investigation dédiée. Cette  $DSP$  est ensuite soumise à un simple ajustement polynomial grâce auquel on infère une estimation du modèle de bruit sous-jacent.

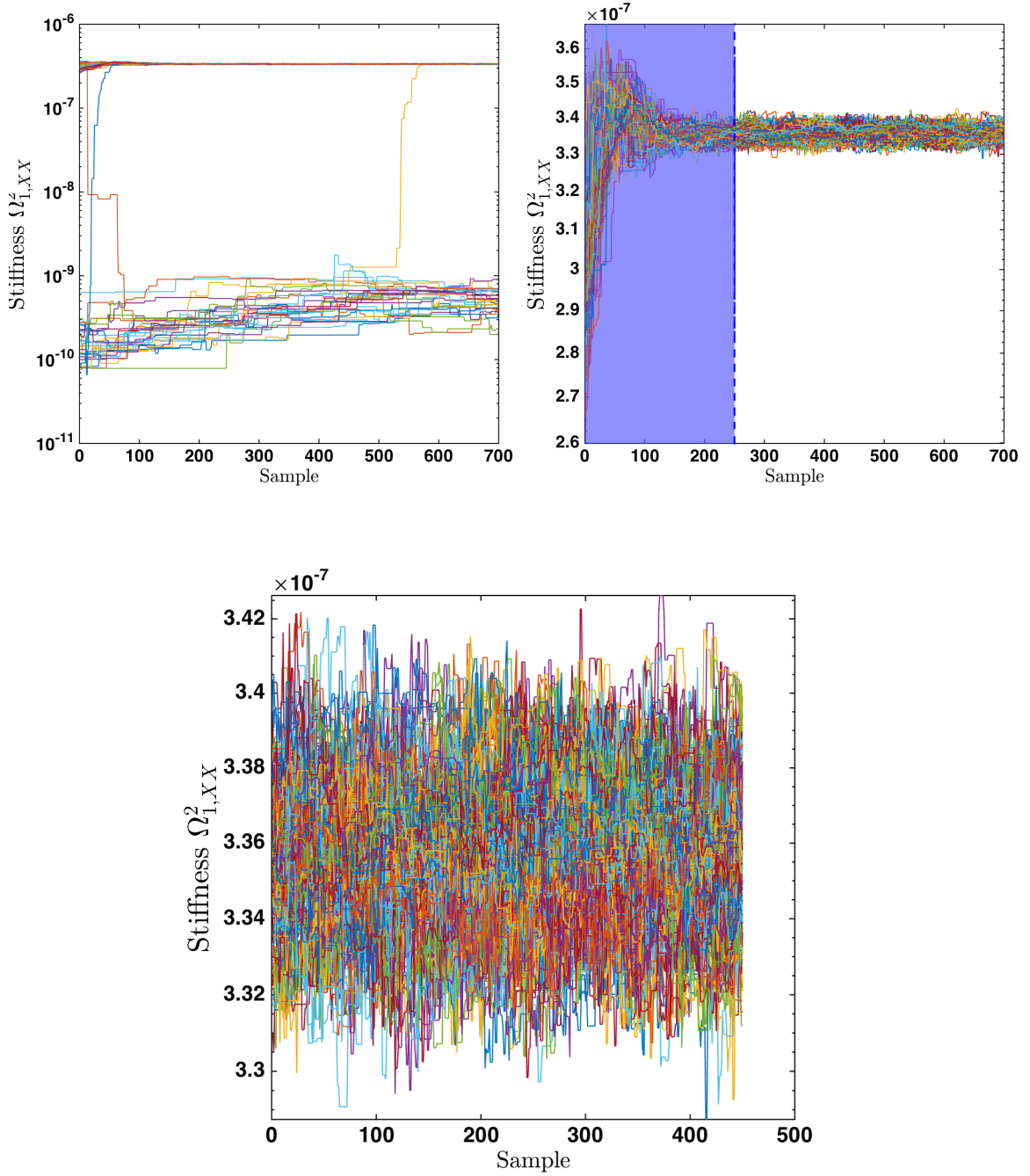


FIGURE A.2 – Marche aléatoire des chaînes durant le processus MCMC. Seul est exposé le paramètre de raideur entre la masse d'épreuve numéro un et le satellite  $\Omega_{1,XX}^2$  parmi l'ensemble des paramètres du modèle  $\vec{\theta}$ . **En haut à gauche**, on trace l'évolution de l'ensemble des  $K = 248$  marcheurs à la manière d'une série temporelle. Les différentes couleurs de tracé correspondent à des marcheurs distincts. **En haut à droite**, on retire le sous-ensemble des marcheurs qui semblent écartés du mouvement d'ensemble dominant en les discriminant par imposition d'un seuil minimal pour la valeur du logarithme de la vraisemblance correspondant. **En bas**, on rallonge la phase de burn-in (zone bleue éliminée) pour s'assurer qualitativement de la stationnarité des chaînes.

L'exécution de l'algorithme *MCMC* est réalisée avec la configuration suivante :  $K = 248$  marcheurs,  $L = 700$  éléments par chaîne,  $L_{burn-in} = 300$ , facteur d'échelle<sup>19</sup>  $a = 2$ , positions initiales  $\vec{\theta}_k^{(t=0)}$  issues d'un tirage aléatoire gaussien à partir d'un ajustement grossier préliminaire des paramètres (pour identifier la zone d'intérêt et accélérer la convergence du processus). La figure A.2 illustre la marche aléatoire des chaînes, en se concentrant en particulier sur un des éléments du vecteur de paramètre  $\vec{\theta}$  à ajuster, le paramètre de raideur  $\Omega_{1,XX}^2$  entre la masse d'épreuve numéro un et le satellite.

Trois graphes sont présentés dans cette figure. En haut en gauche, on trace sans discrimination l'évolution de l'ensemble des marcheurs après la phase de *burn-in*. On aperçoit deux sous-ensembles distincts, le premier contenant beaucoup plus de marcheurs que le second, et on remarque quelques échanges entre ces sous-groupes. En analysant la valeur de la vraisemblance correspondant à ces deux sous-ensembles, on peut réaliser que le groupe le moins fourni en bas du graphe fait preuve d'une vraisemblance nettement moins élevée. On interprète cette disparité comme due à une faible communication entre les chaînes de ces deux groupes durant le processus de construction des chaînes, ou éventuellement quelques événements fortuits improbables. En effet, pour construire l'élément de chaîne suivant à partir de la position courante, un marcheur  $k$  s'informe de la position courante d'un autre marcheur  $j$  tiré aléatoirement (cf. section A.2.2). De fait, la communication entre deux groupes de marcheurs n'est pas systématique, bien qu'elle soit d'autant plus probable si les groupes observent de grandes différences de peuplement. Au bout d'un temps suffisant, le second groupe finira par rejoindre le premier. Le second sous-groupe de marcheurs en bas du graphe est exclu de l'analyse par discrimination sur la vraisemblance, en imposant un seuil minimal pour la valeur de la vraisemblance induite par les éléments de chaque chaîne<sup>20</sup>. En haut à droite, sont représentés les marcheurs après élimination du sous-groupe n'ayant pas convergé. On constate qualitativement l'instationnarité des chaînes entre les échantillons 0 et 250. Cela signifie que les chaînes n'ont pas encore atteint leur état d'équilibre, état pour lequel la distribution statistique de la chaîne reflète la *fdp* cible. On en conclut que la phase de *burn-in* n'était probablement pas suffisamment longue, et on l'étend jusqu'au temps  $t = 250$  en éliminant tous les échantillons antérieurs. On aboutit finalement au graphe du bas, où l'on peut se persuader qualitativement de la bonne convergence de la chaîne.

A la fin du processus, les  $K_{eff} = 219$  chaînes de longueur  $L_{eff} = 450$  non exclues sont concaténées pour produire une chaîne globale de  $K_{eff} \times L_{eff} = 98550$  éléments. Bien sûr, le TAI<sup>21</sup> réduit la statistique réellement effective. En fin de *burn-in*, le TAI maximal pour l'ensemble des chaînes était de  $\tau_{int}^{max} \approx 18$ . Cela signifie que dans le pire des cas, le nombre effectif de réalisations indépendantes dans la chaîne globale est de  $N_{eff} = \frac{K_{eff} \times L_{eff}}{\tau_{int}^{max}} = 5475$ <sup>22</sup>. Les estimateurs de l'espérance et de la variance des

19. Dans la phase de *burn-in*, le facteur d'échelle démarre à la valeur de 10 et diminue progressivement jusqu'à atteindre la valeur de 2 en fin de *burn-in*.

20. Plus précisément, si un quelconque élément d'un marcheur  $\vec{\theta}_k^{(t)}$  induit une valeur du logarithme de la vraisemblance en-deçà d'un certain seuil, le marcheur est exclu de l'analyse.

21. Temps d'Autocorrélation Intégré (cf. section A.2.2)

22. Ce constat est un peu sévère, car on considère le TAI maximal parmi ceux de l'ensemble

paramètres sont construits en moyennant respectivement les éléments de la chaîne globale et les écarts quadratiques à cette moyenne. De plus, l'histogramme de la distribution de la chaîne globale donne une représentation graphique de la *fdp* cible marginalisée pour un paramètre donné (cf. figure : A.3). On utilise ici une propriété remarquable des méthodes *MCMC* qui permettent une marginalisation très directe de la *fdp* multivariée cible ainsi échantillonnée.

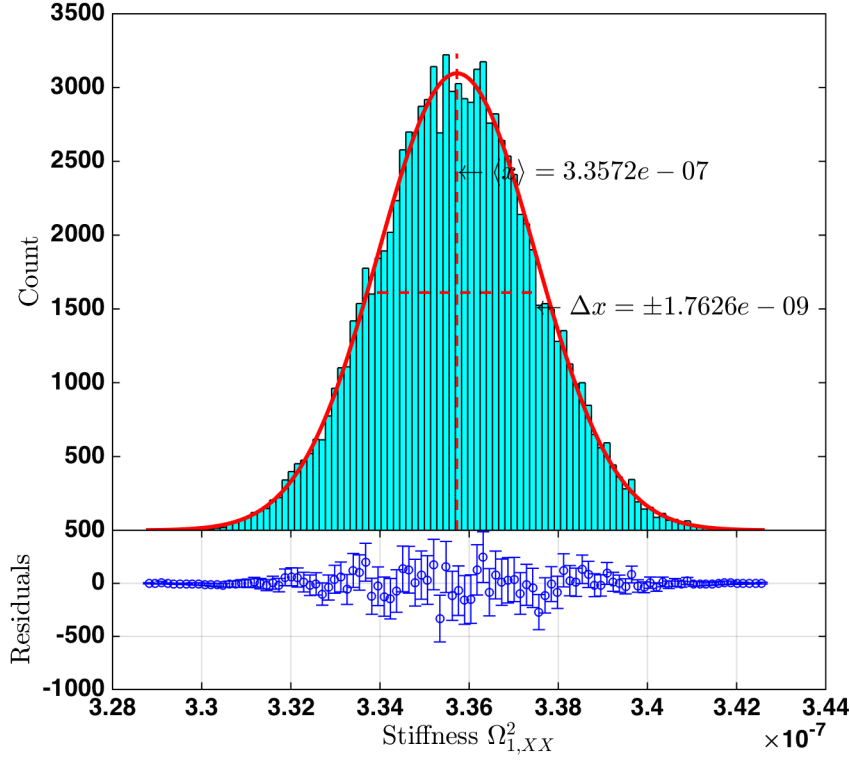


FIGURE A.3 – Histogramme de la distribution statistique du paramètre  $\Omega_{1,XX}^2$  dans la chaîne globale (100 bins). Le tracé rouge représente la distribution gaussienne théorique construite à partir de l'estimation de l'espérance et de la variance de la chaîne. Le tracé du bas représente les écarts du décompte des réalisations tombant dans chaque intervalle à la prédiction de la distribution gaussienne.

De même, la corrélation entre deux paramètres s'étudie très directement en représentant en regard l'une de l'autre les distributions statistiques de deux paramètres. Dans la figure A.4, on étudie la corrélation entre les distributions statistiques des paramètres  $\Omega_{1,XX}^2$  et  $\Omega_{2,XX}^2$ . La figure de corrélation consiste en une représentation des isocontours du nombre de réalisations des paramètres  $\Omega_{1,XX}^2$  et  $\Omega_{2,XX}^2$  dans la chaîne globale tombant dans les intervalles d'un histogramme à deux dimensions. Ces isocontours forment une ellipse dont le demi-grand axe admet une pente relativement importante. Cette pente indique une corrélation significative entre ces deux paramètres. D'après le modèle paramétrique de l'équation A.1, qui n'est pas le modèle utilisé ici mais qui est comparable au modèle *SSM* en ce qui concerne la gestion des

---

des chaînes après le *burn-in*. Non seulement il est probable que cette quantité diffère en fonction des marcheurs, mais les 700 échantillons supplémentaires tendront aussi à réduire ce temps. L'estimation de la statistique effective est ici volontairement pessimiste.

effets de raideur, on constate que les paramètres  $\Omega_{1,XX}^2$  et  $\Omega_{2,XX}^2$  sont d'influence équivalente sur l'accélération différentielle, en traduisant tous deux le niveau de couplage entre  $\ddot{o}_{12}^{mod}$  et  $o_1^{data}$ . De ce fait, une paramétrisation différente est en général utilisée pour ce problème. Elle est donnée par le couple de paramètres  $(\Omega_{1,XX}^2, \Omega_{12,XX}^2)$ , où  $\Omega_{12,XX}^2 = \Omega_{2,XX}^2 - \Omega_{1,XX}^2$  est appelée raideur différentielle, qui permet de manipuler des paramètres de raideur décorrélés.

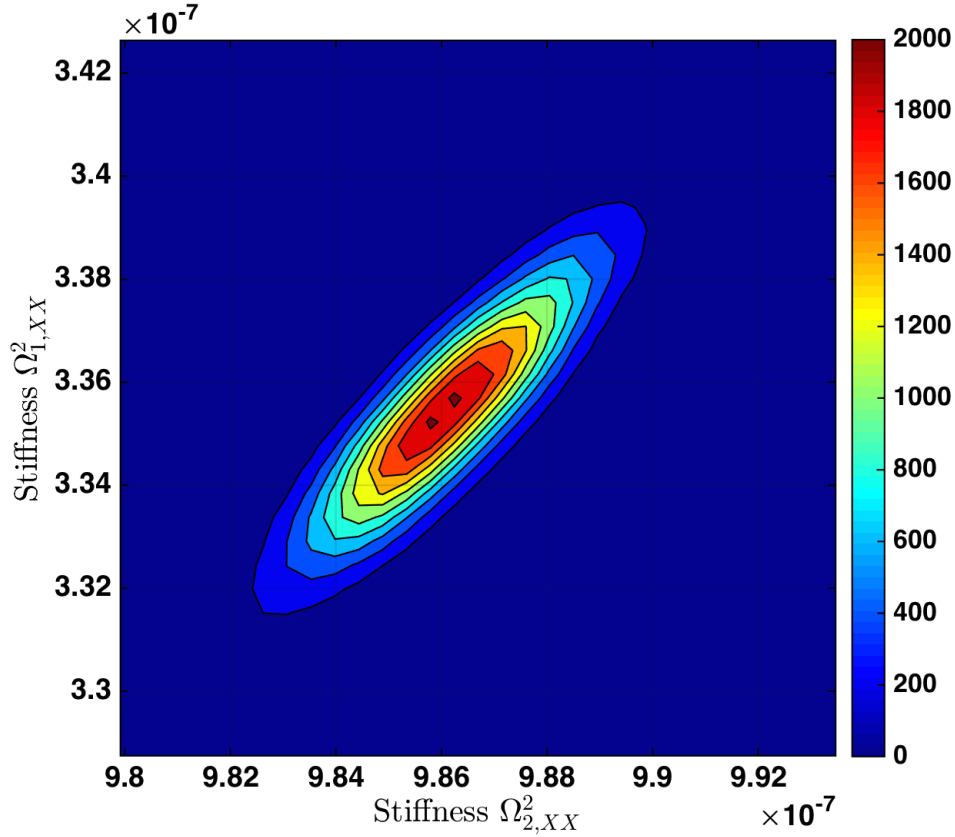


FIGURE A.4 – Figure de corrélation des paramètres  $\Omega_{1,XX}^2$  et  $\Omega_{2,XX}^2$ . Il s'agit de la représentation des isocontours du nombre de réalisations des paramètres  $\Omega_{1,XX}^2$  et  $\Omega_{2,XX}^2$  dans la chaîne globale tombant dans les intervalles d'un histogramme à deux dimensions. La pente du demi-grand axe de l'ellipse traduit le degré de corrélation des paramètres. Les axes de l'ellipse fournissent l'information d'une paramétrisation privilégiée du modèle, car dans ce nouvel espace de paramètres, ces derniers sont indépendants les uns des autres.

Enfin, on se propose de comparer les spectres des données à ceux prédits par le modèle  $\lambda^{SM}$ , ce dernier étant évalué au point  $\vec{\theta}_{best}$  donnant le meilleur ajustement. La figure A.5 présente quatre graphes, chacun composé de la superposition des spectres des données simulées, des prédictions du modèle, du résidu<sup>23</sup> et du modèle de bruit utilisé, ce dernier provenant de l'ajustement polynomial des mesures réalisées lors de l'investigation de bruit dédiée.

23. qui n'est autre que le numérateur du logarithme de la vraisemblance à l'équation A.8

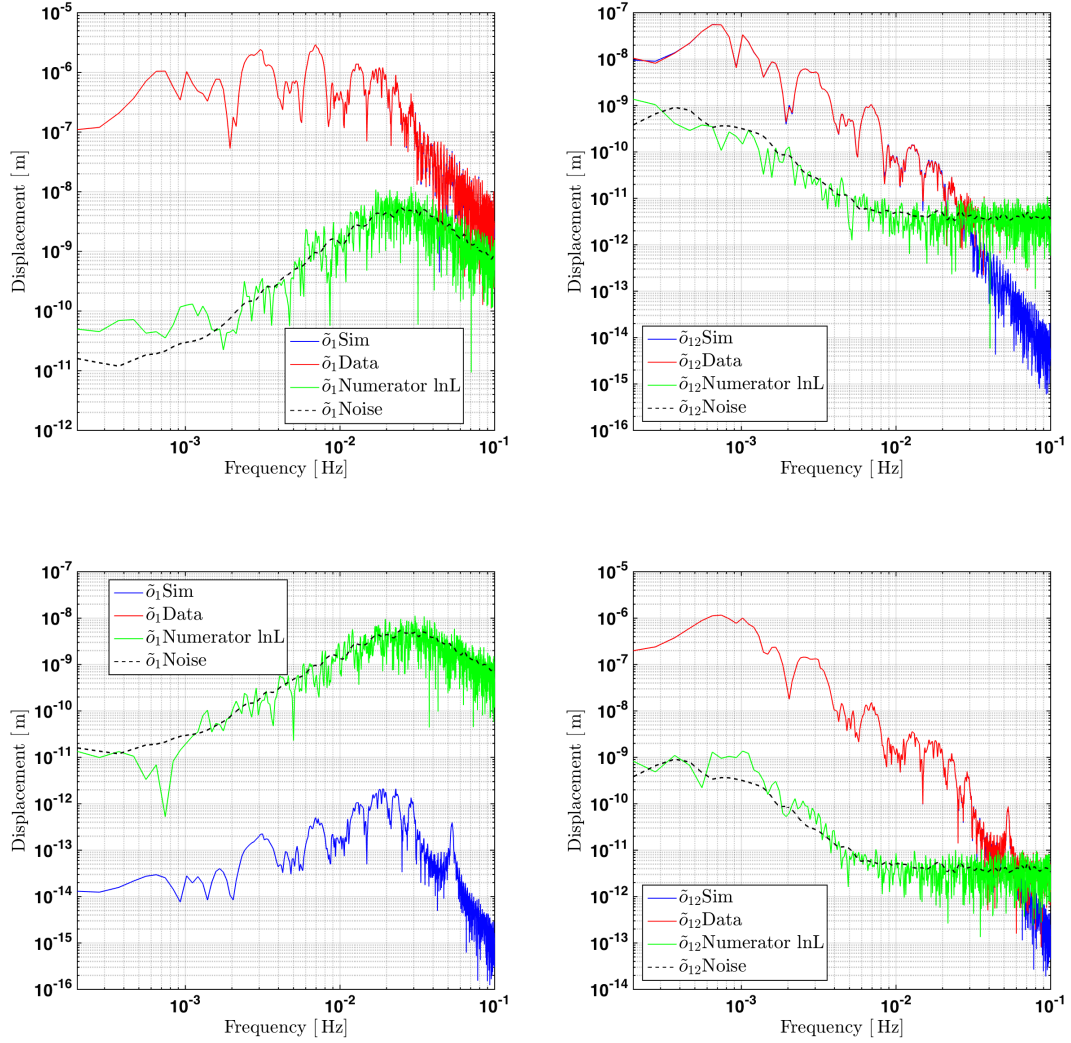


FIGURE A.5 – Comparaison des spectres des données simulées (en rouge), des prédictions du modèle (en bleu), des résidus (en vert) et des modèle de bruit (en noir) pour chacune des sorties  $o_1$  et  $o_{12}$  des deux investigations analysées conjointement. En haut, les graphes 1 et 2 correspondent à une première investigation dans laquelle est appliqué le signal de guidage  $g_1$ . En bas, les graphes 3 et 4 concernent l'investigation utilisant le signal de guidage  $g_{12}$ .

Les deux graphes du haut (que l'on marque des indices 1 et 2) sont associés à la première investigation impliquant l'injection  $g_1$ , celui de gauche se concentrant sur l'analyse de la sortie  $o_1$  quand celui de droite s'attache à  $o_{12}$ . Les graphes du bas (que l'on marque des indices 3 et 4) se distribuent similairement cette fois-ci pour l'injection  $g_{12}$ . Ces deux investigations sont analysées conjointement et une unique  $fdp$  jointe est échantillonnée à partir de l'ensemble de ces données, ce qui permet de bénéficier d'une information plus riche pour l'estimation des paramètres, certains paramètres étant influents dans les deux investigations.

L'injection  $g_1$  persuade le système de contrôle que la masse d'épreuve numéro un est en mouvement dans son compartiment<sup>24</sup>. La variable  $o_1$  étant en *Drag-Free*, le système de micropropulsion du satellite est sollicité pour corriger cette erreur de positionnement apparente. La masse d'épreuve numéro deux va donc, de même, se déplacer relativement au satellite du fait de cette commande, mais le déplacement différentiel  $x_{12}$ , sous contrôle du système de capacité, ne devrait pas être modifié par cette agitation du satellite. Cependant, du fait des différences de couplage entre les masses 1 et 2 avec le satellite ( $\Omega_{1,XX}^2 \neq \Omega_{2,XX}^2$ ), les accélérations appliquées par le mouvement du satellite sur ces masses sont légèrement différentes, et l'on observe alors un déplacement différentiel significatif. En revanche, l'injection  $g_{12}$  n'engendre des conséquences appréciables que sur la voie de mesure  $o_{12}$ . En effet, le système de capacité corrige  $o_{12}$  en agissant uniquement sur la masse numéro 2. Tout effet de cette injection  $g_{12}$  sur la sortie  $o_1$  semble être largement dominé par le bruit, en particulier celui du système de micropropulsion.

En ce qui concerne les résidus, on note pour les graphes 1, 2 et 4<sup>25</sup> une assez bonne correspondance entre les résidus et le modèle de bruit. Toutefois, il subsiste à basse fréquence des niveaux de résidu significativement au-dessus du niveau de bruit pour les graphes numéro 1 et 4, typiquement au voisinage de la fréquence  $f = 1.10^{-3}\text{Hz}$ . Cependant, on juge la méthode d'estimation du modèle de bruit pas encore entièrement satisfaisante. Il s'agit simplement d'un ajustement polynomial des densités spectrales d'amplitude des observations  $o_1^{noise}$  et  $o_{12}^{noise}$  fournies par les investigations de bruit. Une méthode de détermination de ce modèle plus précise et robuste nous semble essentielle avant de pouvoir discuter d'un tel degré de performance de l'ajustement *MCMC* réalisé ici. Ce point sera en outre discuté dans la section suivante.

### A.3 Discussion et perspectives

La méthode présentée dans cette annexe semble prometteuse dans le cadre de l'identification système réalisée par l'intermédiaire du modèle *SSM*. L'algorithme est d'autant plus justifié lorsque l'évaluation de la fonction de vraisemblance est coûteuse en terme de ressources de calcul, ce qui est le cas avec le modèle *SSM*.

---

24. ou de manière équivalente modifie le signal de référence à traquer

25. le graphe numéro 3 étant moins pertinent pour cette analyse étant donné la nette domination du bruit

L’opportunité de la parallélisation massive de l’exécution qu’il offre permet de réaliser ces études en quelques heures seulement, cette durée dépendant bien entendu du temps de convergence nécessaire et plus généralement d’une configuration adéquate de l’algorithme. Malgré ces performances, les charges opérationnelles quotidiennes de la communauté scientifique lors de la mission et les contraintes de temps qu’elles impliquent semblent privilégier des méthodes simples, rapides, robustes, reproductibles et documentées, du moins dans l’analyse des données en temps réel. Il est clair qu’une équipe en poste ne peut se permettre des temps d’attente trop longs et des procédures d’optimisation des algorithmes trop nombreuses lors des activités quotidiennes. D’autant plus que l’outil d’ajustement présenté ici sort à l’heure actuelle du cadre de la boîte à outil *LTPDA*, cette dernière étant exclusivement utilisée dans le cadre des opérations. C’est la raison pour laquelle cet outil d’ajustement, initié à l’*APC* durant cette thèse, a vu son développement décliner progressivement ces derniers mois. S’il n’est probablement pas adapté à une utilisation en temps réel lors des opérations, il n’en reste pas moins un outil alternatif intéressant, pouvant être sollicité a posteriori afin par exemple d’affiner certains résultats obtenus au jour le jour par les équipes en place. A ce titre, le point fort de cet algorithme est la grande généralité des problèmes auxquels il peut être confronté, comme ceux posés par des modèles largement multivariés et exigeants en temps de calcul, des paramètres non-linéaires ou la non-gaussianité de la *fdp* cible.

Pour cette raison, on pense nécessaire la poursuite du développement de ce type d’algorithme qui, par ailleurs, sollicite à nouveau la modélisation *SSM* disponible dans la boîte à outil *LTPDA*. Un certain nombre de points d’amélioration ont déjà été évoqués dans la section précédente. Tout d’abord, la connaissance précise préalable d’un modèle de bruit pour l’ajustement des paramètres constitue une difficulté dans la preuve de la pertinence des résultats de l’estimation. D’une part, on pense que la méthode d’estimation du modèle de bruit à partir des données de bruit observées n’est pas optimale et doit être revue. A ce titre, on pense s’aider de la méthode récemment développée par la collaboration *LPF* dédiée à l’ajustement de densités spectrales d’amplitude et accessible dans *LTPDA* sous le nom de `ao.psdvfit`. Ce point constitue la priorité numéro un dans la poursuite des activités de développement de cet outil. D’autre part, on devrait également pouvoir s’extraire de la nécessité de supposer un modèle de bruit a priori. En effet, cette nécessité rend l’analyse dépendante de la réussite des investigations de bruit et suppose aussi la stationnarité de ce dernier. L’article [44] présente la définition d’une fonction de vraisemblance ne nécessitant aucune mesure de ce niveau de bruit. Il serait alors intéressant de rendre optionnel le choix de l’une ou l’autre fonction de vraisemblance dans l’algorithme, comme cela est d’ailleurs le cas dans la plupart des procédures d’analyse implémentée dans *LTPDA*. Cet aspect représente la priorité numéro deux. Enfin, la dépendance intrinsèque de l’ajustement à la nature du modèle  $\lambda$  considéré, par l’intermédiaire de la définition de la fonction de vraisemblance utilisée, complique l’établissement de toute conclusion quantitative sur la précision de l’estimation des paramètres physiques. Par exemple, les diverses comparaisons réalisées entre les ajustements issus de cette méthode et d’autres utilisant le modèle d’accélération aux équations A.3 et A.3, bien qu’ils admettent généralement une certaine



cohérence<sup>26</sup>, sont difficiles à interpréter compte tenu de la nature très différente des modèles supposés. La priorité numéro trois sera donc de connecter les modèles d'accélération à l'outil *MCMC*, ce dernier pouvant alors sélectionner au choix différents modèles, ce qui permettra de réaliser des comparaisons plus pertinentes entre les diverses méthodes d'ajustement.

---

26. Elle est relative toutefois, car les estimations issues des méthodes d'ajustement en comparaison se situaient régulièrement en dehors de leur barre d'erreur respective, écart pouvant atteindre plusieurs  $\sigma$ .

# Acronymes

- AEI*** Albert Einstein Institute. 180, 194, 196, 197
- APC*** AstroParticule et Cosmologie. 189, 210, 218
- CAPACT*** CAPacitive ACTuation. 105, 106, 108, 109, 112
- CGS*** Compagnia Generale per lo Spazi. 172
- CW*** Clohessy-Wiltshire. 52, 53
- DFACS*** Drag-Free and Attitude Control System. 95, 111, 113, 117, 121, 132, 153, 203
- DRS*** Disturbances Reduction System. 44
- DSA*** Densité Spectrale en Amplitude. 44, 130
- DSP*** Densité Spectrale de Puissance. 44, 128, 205, 212
- DWS*** Differential Wavefront Sensing. 8, 97, 98, 126, 189
- ESA*** European Space Agency. 35, 193, 202, 210
- GOAT*** Gravitational Observatory Advisory Team. 198
- GRS*** Gravitational Reference Sensor. 36, 38, 40, 41, 43, 49
- IFO*** InterFerOmeter. 8, 97, 99–101, 135, 172
- IMS*** Interferometric Measurement System. 44
- IS*** Inertial Sensors. 97, 100, 102, 103, 173
- LIGO*** Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory. 33
- LISA*** Laser Interferometer Space Antenna. 35, 50, 67, 94, 96, 98, 104, 112, 114, 116, 117, 128, 129, 136, 137, 142, 150, 180, 183, 186, 191, 201
- LPF*** LISA Pathfinder. 35, 42, 43, 96, 99–103, 105, 111, 114, 116, 117, 129, 135–137, 150, 152, 165–167, 169, 170, 173–178, 186, 193, 199, 201, 203–205, 218, 222, 223
- LTPDA*** LISA Technology Package Data Analysis. 49, 114, 168, 170, 193, 202, 204, 205, 210, 218
- LTP*** LISA Technology Package. 97, 99, 111, 177, 193, 220
- MCMC*** Monte-Carlo Markov Chain. 207, 211–214, 216, 219
- MIMO*** Multiple-Input Multiple-Output system. 86, 114, 188
- MPS*** MicroPropulsion System. 105, 112, 174
- NASA*** National Aeronautics and Space Administration. 30, 35

**ONERA** Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques. 173, 199, 222

**OSE** Offline Simulations Environment. 202

**OSTT** On Station Thermal Tests. 169, 171, 172

**S/C** spacecraft. 220, 221, 223

**SISO** Single Input Single Output. 188

**SOVT** System Operations Validation Test. 210

**SSM** State Space Model. 204, 205, 210, 211, 215, 218

**STOC** Science and Technology Operations Centre. 210

**TAI** Temps d'Autocorrélation Intégré. 212, 214

**TDI** Time Delay Interferometry. 40, 128, 183, 191

**TM<sub>s</sub>** test masses. 221, 222

**TM** test mass. 220

**TT** Transverse Traceless. 25, 33

**eLISA** evolved Laser Interferometer Space Antenna. 6, 12, 13, 15, 28, 31, 33–35, 38, 43, 45, 49, 60, 122, 129, 166, 170, 174–178, 181, 182, 184, 193, 194, 196–199, 203, 220–223

# Bibliographie

- [1] Heather AUDLEY. « Preparing for LISA Pathfinder operations : characterisation of the optical metrology system ». Thèse de doct. 11 juil. 2014.
- [2] D BORTOLUZZI et W. J. WEBER. *Test-Mass Electrostatic Suspension Actuation Stiffness and Cross-Talk Matrix*. S2-UTN-TN-3009. URL : <http://www5.unitn.it/Ugcvp/en/Web/Prodotto/44534> (visité le 11/09/2015).
- [3] N. BRANDT et al. *Experiment Performance Budget*. Note technique S2-ASD-RP-3036, issue 2.4. Airbus Defence & Space, 9 avr. 2010.
- [4] L. CARBONE et al. « Thermal gradient-induced forces on geodetic reference masses for LISA ». In : *Physical Review D* 76.10 (16 nov. 2007). ISSN : 1550-7998, 1550-2368. DOI : 10.1103/PhysRevD.76.102003. arXiv : 0706.4402. URL : <http://arxiv.org/abs/0706.4402> (visité le 29/09/2015).
- [5] A. CAVALLERI et al. « Gas damping force noise on a macroscopic test body in an infinite gas reservoir ». In : *Physics Letters A* 374.34 (26 juil. 2010), p. 3365–3369. ISSN : 0375-9601. DOI : 10.1016/j.physleta.2010.06.041. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960110007279> (visité le 29/09/2015).
- [6] A. CAVALLERI et al. « Increased Brownian Force Noise from Molecular Impacts in a Constrained Volume ». In : *Physical Review Letters* 103.14 (28 sept. 2009), p. 140601. DOI : 10.1103/PhysRevLett.103.140601. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.140601> (visité le 29/09/2015).
- [7] Francesca CIRILLO. *Controller Design for the Acquisition Phase of the LISA Mission using a Kalman Filter*. 25 juil. 2007. URL : <http://etd.adm.unipi.it/> (visité le 12/03/2015).
- [8] Ignazio CIUFOLINI et John Archibald WHEELER. *Gravitation and inertia*. Princeton University Press, 1995. xi+498. ISBN : 0-691-03323-4.
- [9] S. V. DHURANDHAR et al. « Fundamentals of the LISA stable flight formation ». In : *Classical and Quantum Gravity* 22.3 (7 fév. 2005), p. 481. ISSN : 0264-9381. DOI : 10.1088/0264-9381/22/3/002. URL : <http://iopscience.iop.org/0264-9381/22/3/002> (visité le 27/02/2015).
- [10] James DIEBEL. *Representing Attitude : Euler Angles, Unit Quaternions, and Rotation Vectors*. 2006.

- [11] Rita DOLESI et al. *LISA Pathfinder on-orbit investigations : scientific justification, implementation guidelines, and scientific products*. S2-UTN-TN-3109 Iss. 1/Rel. 0.
- [12] Albert EINSTEIN. *The meaning of relativity*. Princeton University press, 1956. 166 p. ISBN : 0-691-08007-0.
- [13] *Feedback systems : an introduction for scientists and engineers*. Princeton, Royaume-Uni de Grande-Bretagne et d'Irlande du Nord, 2008. xii+396. ISBN : 978-0-691-13576-2.
- [14] Daniel FOREMAN-MACKEY et al. « emcee : The MCMC Hammer ». In : *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 125.925 (mar. 2013), p. 306–312. ISSN : 00046280, 15383873. DOI : 10.1086/670067. arXiv : 1202.3665. URL : <http://arxiv.org/abs/1202.3665> (visité le 09/07/2015).
- [15] « From laboratory experiments to LISA Pathfinder : achieving LISA geodesic motion ». In : *Classical and Quantum Gravity* 28.9 (7 mai 2011), p. 094002. ISSN : 0264-9381, 1361-6382. DOI : 10.1088/0264-9381/28/9/094002. URL : <http://stacks.iop.org/0264-9381/28/i=9/a=094002?key=crossref.93cc3819197617bbb165b04c72043f6b> (visité le 08/09/2015).
- [16] Peter GATH. *Requirement Breakdown*. Note technique LISA-ASD-TN-5001, issue 1.4. Airbus Defence & Space, 19 juin 2007.
- [17] Peter GATH et Francesca CIRILLO. *DFACS Design for LISA*. Note technique LISA-ASD-TN-2002, issue 1.5. Airbus Defence & Space, 29 jan. 2009.
- [18] Peter GATH et Francesca CIRILLO. *DFACS Requirement Specification*. Note technique LISA-ASD-RS-3900, issue 0.5. Airbus Defence & Space, 29 jan. 2009.
- [19] Andrew GELMAN, John B. CARLIN et Hal S. STERN. *Bayesian data analysis*. 2014. xiv+661. ISBN : 978-1-4398-4095-5.
- [20] Jonathan GOODMAN et Jonathan WEARE. « Ensemble samplers with affine invariance ». In : *Communications in Applied Mathematics and Computational Science* 5.1 (31 jan. 2010), p. 65–80. ISSN : 2157-5452, 1559-3940. DOI : 10.2140/camcos.2010.5.65. URL : <http://msp.org/camcos/2010/5-1/p04.xhtml> (visité le 09/07/2015).
- [21] Christopher HALL. *Spacecraft Dynamics and Control*. 2003. URL : <http://www.dept.aoe.vt.edu/~cdhall/courses/aoe4140/> (visité le 10/03/2015).
- [22] Michael Paul HOBSON et al. Bruxelles, Belgique, France, 2009. xx+554. ISBN : 978-2-8041-0126-8.
- [23] J. JARRIGE et al. « Thrust Measurements of the Gaia Mission Flight-Model Cold Gas Thrusters ». In : *Journal of Propulsion and Power* 30.4 (2014), p. 934–943. ISSN : 0748-4658. DOI : 10.2514/1.B35091. URL : <http://dx.doi.org/10.2514/1.B35091> (visité le 09/09/2015).
- [24] Oliver JENNRICH, Antoine PETITEAU et Edward K. PORTER. *Final configuration of the ELISA(NGO) detector for science performance studies*. 7 avr. 2012.

- [25] Nikolaos KARNESIS et al. « Bayesian Model Selection for LISA Pathfinder ». In : *Physical Review D* 89.6 (13 mar. 2014). ISSN : 1550-7998, 1550-2368. DOI : 10.1103/PhysRevD.89.062001. arXiv : 1304.4436. URL : <http://arxiv.org/abs/1304.4436> (visité le 16/07/2015).
- [26] « LISA Technology Package Flight Hardware Test Campaign ». In : 9th LISA Symposium. T. 467. 1<sup>er</sup> jan. 2013, p. 141. URL : <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013ASPC..467..141C> (visité le 11/09/2015).
- [27] *LTPDA Toolbox*. URL : <https://www.elisascience.org/ltpda/> (visité le 20/07/2015).
- [28] Paul W. McNAMARA. « LISA Pathfinder : Mission Status ». 17 avr. 2012.
- [29] Charles W. MISNER, Kip S. THORNE et John Archibald WHEELER. *Gravitation*. 1 t. San Francisco, Etats-Unis : W. H. Freeman et company, 1973. 1279 p. ISBN : 0-7167-0334-3.
- [30] Richard M. MURRAY. *CDS 101, Principles of Feedback and Control*. 2002. URL : <http://www.cds.caltech.edu/~murray/courses/cds101/fa02/caltech/pph02-ch19-23.pdf> (visité le 17/06/2015).
- [31] *NGO assessment study report (Yellow Book)*. report. 2012. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00730260> (visité le 26/03/2015).
- [32] Katsuhiko OGATA. *Modern Control Engineering*. 5 edition. Boston : Prentice Hall, 4 sept. 2009. 912 p. ISBN : 978-0-13-615673-4.
- [33] Antoine PETITEAU. Thèse de doct. 30 juin 2008. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00383222/document> (visité le 27/02/2015).
- [34] B.S. SATHYAPRAKASH et Bernard F. SCHUTZ. « Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves ». In : *Living Reviews in Relativity* 12 (2009). ISSN : 1433-8351. DOI : 10.12942/lrr-2009-2. URL : <http://www.livingreviews.org/lrr-2009-2> (visité le 20/05/2015).
- [35] Ralf SCHUBERT et Alexander SCHLEICHER. *DFACS Science Mode 1 Design and Analysis*. Note technique S2-ASD-TN-2003, issue 3.0. Airbus Defence & Space, 15 mar. 2013.
- [36] Gregory G. SLABAUGH. « Computing Euler angles from a rotation matrix ». In : *Retrieved on August 6.2000* (1999), p. 39–63. URL : [https://truesculpt.googlecode.com/hg-history/38000e9dfece971460473d5788c235fbb82f31b/Doc/rotation\\_matrix\\_to\\_euler.pdf](https://truesculpt.googlecode.com/hg-history/38000e9dfece971460473d5788c235fbb82f31b/Doc/rotation_matrix_to_euler.pdf) (visité le 17/06/2015).
- [37] Carlos F. SOPENA. « Probing the strong gravity regime with eLISA : Progress on EMRIs ». In : *ASP Conf.Ser.* 467 (2013), p. 69.
- [38] *Spacecraft gravitational torques, NASA SPACE VEHICLE DESIGN CRITERIA (Guidance and Control)*. Special Publication. NASA, 1<sup>er</sup> mai 1969. URL : <http://www.zerognews.com/special/sp8000/archive/00000020/index.html> (visité le 17/06/2015).

- [39] « Test-mass charging simulations for the LISA Pathfinder mission ». In : *Classical and Quantum Gravity* 22.10 (2005), S311. ISSN : 0264-9381. DOI : 10.1088/0264-9381/22/10/023. URL : <http://stacks.iop.org/0264-9381/22/i=10/a=023> (visité le 30/09/2015).
- [40] « The Gravitational Universe ». In : *arXiv :1305.5720 [astro-ph, physics :gr-qc]* (24 mai 2013). arXiv : 1305.5720. URL : <http://arxiv.org/abs/1305.5720> (visité le 03/05/2015).
- [41] « The Gravitational Wave Observatory Designer : Sensitivity Limits of Spaceborne Detectors ». In : *arXiv :1411.1260 [astro-ph, physics :physics]* (5 nov. 2014). arXiv : 1411.1260. URL : <http://arxiv.org/abs/1411.1260> (visité le 21/05/2015).
- [42] « The LISA Pathfinder Mission ». In : *Journal of Physics : Conference Series* 610.1 (11 mai 2015), p. 012005. ISSN : 1742-6596. DOI : 10.1088/1742-6596/610/1/012005. URL : <http://iopscience.iop.org/1742-6596/610/1/012005> (visité le 19/06/2015).
- [43] Michele VALLISNERI. « Use and Abuse of the Fisher Information Matrix in the Assessment of Gravitational-Wave Parameter-Estimation Prospects ». In : *Physical Review D* 77.4 (4 fév. 2008). ISSN : 1550-7998, 1550-2368. DOI : 10.1103/PhysRevD.77.042001. arXiv : [gr-qc/0703086](http://arxiv.org/abs/gr-qc/0703086). URL : <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0703086> (visité le 16/07/2015).
- [44] Stefano VITALE et al. « Data series subtraction with unknown and unmodeled background noise ». In : *Physical Review D* 90.4 (11 août 2014), p. 042003. DOI : 10.1103/PhysRevD.90.042003. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.90.042003> (visité le 02/07/2015).
- [45] Mario WEYRICH. « Modelling and Analyses of the LISA Pathfinder Technology Experiment ». Thèse de doct. University of Stuttgart, 2008.

# Abstract

The gravitational Universe and the rise of an entirely new astronomy using gravitational waves have been selected by ESA as the scientific theme for the future large space mission L3 planned for 2030 decade. In that context, eLISA mission seems favored, and is besides preceded by the LISA Pathfinder mission, about to be launched (December 2nd), that aims to demonstrate the technology envisaged. Focused on an observation frequency band lower than the current ground detectors, which the new generations have just started (or are about to start) the observation runs, eLISA mission would be able to observe compact binary objects, like supermassive or intermediate black holes, neutron stars, white dwarves, and eventually cosmological sources (cosmic strings, Universe phase transitions). The scientific output of this mission would be very wide, concerning at the same time fundamental physics, cosmology and astrophysics.

Detection principle requires to maintain four cubic test masses in free fall, contained in three different satellites, thus forming a triangular constellation in heliocentric orbit. Laser links will connect the spacecraft the ones to the others, and the interferometer thus formed will be sensitive to tidal deformations caused by gravitational waves crossing the detector. Preventing the test masses as much as possible from any stray external forces is primordial, because any oscillating acceleration of the test mass would be undistinguishable from gravitational waves signals. Metrology and disturbance reduction systems, called *LTP*, will be tested in space conditions with LISA Pathfinder mission. One of the main objectives is to demonstrate that we are able to maintain two free falling test masses in an environment such that the differential acceleration between the test masses is lower than  $3 \cdot 10^{-14} \text{ m s}^{-2} \text{ Hz}^{-1/2}$  at the frequency 1mHz. LISA Pathfinder will represent an essential source of informations for the design and the estimate of *eLISA* sensitivity. The work described in this document comes in this context and is focused on the building of a simulator of the dynamics of the test masses and the spacecraft, that aims to assess system performances from the properties of the various measurement and actuation modules involved in the system, about which LISA Pathfinder will provide the most representative characterization.

This work allows to deliver a simulator reproducing the closed-loop dynamical behavior of a three-body system : the spacecraft (*S/C*) and the two test masses (*TMs*). It allows to perform preliminary estimates of a fundamental quantity, the residual acceleration, that will limit the sensitivity of *eLISA* to low frequency gravi-



tational waves. Furthermore, one of the main results is to provide the *eLISA* community a simulator tool that can have multiple uses. First of all it will allow to test various configuration of the detector with respect to the definition of the mission, its scientific outputs. At a time when the GOAT committee is charged to select the best options possible for *eLISA*, it could be of obvious use. Secondly this tool will provide the data analysis community an ever more precise estimation of the *eLISA* sensitivity, taking into account the improving knowledge on noise sources and detector imperfection. In this spirit the results of LISA Pathfinder will be of utmost importance. Finally this tool is an important part of the on-going effort of the community to construct an "*end-to-end*" simulator.

The main steps of the development of this tool, as presented in this document, are as follows :

- In a first step, in part II, we focused on the definition of the equations of movements which govern the dynamics of the *S/C-TMs* system. The difficulty here was to properly handle the various reference frames in order to characterize the position and orientation of the three bodies (cf. section 5.1). To do this, we introduced a convenient "*writing convention*" (cf. section 5.2) in order to alleviate these difficulties. using this, we developed the equations of motion in three successive steps : a vectorial formulation of the equations in a Galilean frame, their transposition to a non-Galilean frame using Varignon's relation and then expressing this vectorial relation in a specific reference frame. On thus achieves a formulation of the system dynamics in a reference frame that allows its linearization (cf. sections 6.3 et 6.4).
- In chapter 7 we modeled this dynamics by a State-Space representation by which the dynamical state of the system is contained in a state vector. This framework allows to use matrix analysis to manipulate, analyze and solve the dynamics equation, particularly if the are linear and stationary. the dynamics has been linearized, taking advantage of the control laws of the expression of the equations in suitable reference frame (cf. section 7.3). This linear and stationary system is thus represented by a system of matrices (A, B, C and D), independent of the dynamical state of the system and of time. This allows to use the superposition principle (cf. section 7.2.2) which will be used to study the influence of various noise sources, particularly in the frequency domain.
- In part III, the dynamical system is introduced in a closed loop system which includes the modeling of the actuators, of the sensors, of the noises and imperfections as well as the control laws whose purpose is to center and correctly orient the *TMs* and the local *S/C* with respect to the distant one. The simplified models for the sensors, actuators, noise sources and direct perturbations are studied in 8.2, 8.3 and 8.4. We study in detail the effect of the actuation cross-talk, particularly those related to the capacitive system which will have an important impact at high frequencies (cf. section 8.3.2). The coupling between the dynamics of the *S/C* and those of the *TMs*, dependent of the stiffnesses is introduced in section 8.4.2. Further, in chapter 11, we improve

the previous model discussed in using a more realistic modeling of the direct forces applied on *TMs* and of the actuation and measurement noises, which are inspired by modeling and experimental campaigns driven by the *LPF* collaboration, *Airbus Defence & Space* company or the ONERA research institute.

- Finally, in section 8.5, the control laws are presented. The different components of the control strategy (Attitude, Drag-Free and Suspension) are discussed and compared to those of LISA Pathfinder. As "closing the loop" is indispensable to test the system performances and optimize the simulator, we have used the *LPF* controllers in this simulator (cf. section 8.5.3). Because both systems are quite similar, these controllers are sufficient in stabilizing the dynamics (cf. section 10.1). In chapter 10 however, we have observed that these controllers are not optimal for *eLISA* (cf. section 10.4.1). This first instance of the control laws have allowed to study in sufficient detail the system and the improvements of these controllers is hence possible once the different improvements points have been identified (cf. sections 10.1.2, 10.2 and 10.4.1).

In chapter 9, residual acceleration noise is defined and we explained how this is calculated from the dynamics of the *TMs*. From the time dependence of the dynamical variables resulting from the simulation (cf. section 10.1) we estimate the residual acceleration noise level and study its frequency dependence. The study in the frequency domain (cf. section 10.3) allows to analyze each noise component and each imperfection on the acceleration noise, taking advantage of the superposition principle that can be applied because of the linearization of the system. This study demonstrated the non-optimality of the used control laws, which are in particular responsible for a high increase of the acceleration noise at high frequency, due to a too high sensitivity of the feedback loop to the inertial sensor noise (cf. section 10.4). To correct this artefact, we have made simple modifications of the control laws, in addition with a reduction of the crosstalk values, the value of which was irrelevantly high in our case and directly come from a margin imposed by the industrial *Airbus Defence & Space*.

We have been led to consider two different frequency domains in which different dominant components can be identified :

- At low frequency, between  $10^{-5}\text{Hz}$  and  $2.10^{-3}\text{Hz}$  the acceleration noise is dominated by the direct force perturbation. Magnetic forces seem to dominate this contribution at the lowest frequencies, while in the intermediate frequency domain, from  $2\text{mHz}$ , the white brownian noise drives the acceleration noise behavior until around  $6\text{mHz}$  (cf. sections 11.1.1 and 11.3).
- At high frequencies, between  $2.10^{-3}$  and  $10^{-1}\text{Hz}$ , the acceleration noise is dominated by the micro-propulsion system. The loop authority being quite weakened in this frequency domain (cf. figure 8.15), the satellite motion is entirely submitted to his own propulsion noise. Then, the test masses jitter in their housing according to this propulsion noise and the stiffness coupling

lead to an increase of the acceleration noise in this frequency domain. At even higher frequencies, this effect vanished, first because the *Drag-Free* gain increase a little in that domain, and second, because the inertia of the satellite make the position of the test masses in their housing progressively (in  $1/f^2$ ) insensitive to the micropropulsion noise.

If the immediate use of such a simulator is immediately apparent, nevertheless a number of improvements should be implemented if precise quantitative estimates are to be produced. Firstly an optimization of the controllers is essential. It has been seen in section 10.4.1 the importance of the control performances on the acceleration noise. The modification of these controllers, obtained from *LPF* is a first priority. We have also observed in section 13.4 that the mismatch between the sensitive axis and the Drag-Free axis has also an impact on the acceleration noise and hence on the sensitivity curve of *eLISA*. The possible pointing of the telescopes reduces this issue. It seems essential to introduce this possibility in the simulator. In the same context, and maybe in a first stage, we will have to model more realistically the attitude control in introducing the communications between the satellites in the model, which at this stage, considers the *S/C* independently. Last but not least, the inclusion, into the simulator the results from the *LPF* mission. This will result from the work of the whole *LPF* and *eLISA* collaboration.

We keep in mind that a simulation tool is, by definition, imperfect. A model that would reproduce exactly the behavior of a physical system is out of reach. It is therefore necessary to balance between flexibility, speed and "souplesse", favoring the simplicity of the model and the precision and fidelity which tend to enhance its complexity. In our case, whether this simulator will be integrated in the "end-to-end" simulator described in chapter 14 or whether we emphasize on the precision to be obtained on the sensitivity curve, the complexity is not the same. These different aims, and more generally the place of this simulator in the framework of the community, should be discussed by the "Simulation Working Group" of the *eLISA* Consortium.